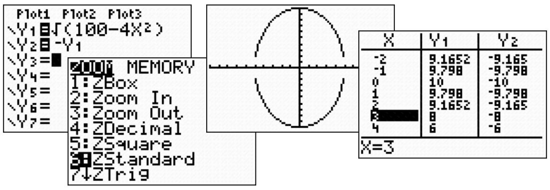
1a $4x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 100 - 4x^2 \Rightarrow y = \sqrt{100 - 4x^2} \vee y = -\sqrt{100 - 4x^2}$ (kortweg $y = \pm\sqrt{100 - 4x^2}$).

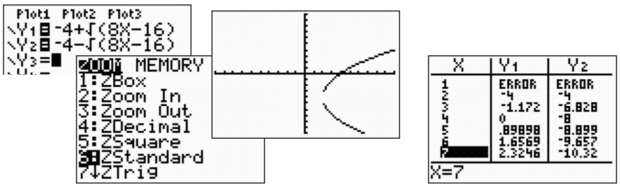
1b Zie de schermen hiernaast.

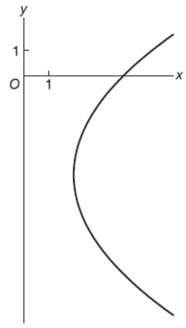


1c $x = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{100 - 4 \cdot 3^2} = \pm\sqrt{100 - 36} = \pm\sqrt{64} = \pm 8$.
De y-coördinaten van deze punten zijn 8 en -8.

1d $y = 6 \Rightarrow 4x^2 + 36 = 100 \Rightarrow 4x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$.
De x-coördinaten van deze punten zijn 4 en -4.

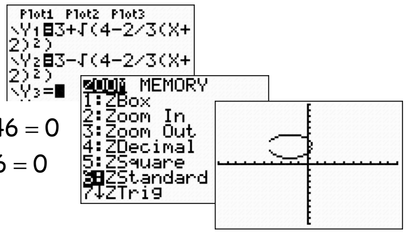
2a $y^2 + 8y - 8x + 32 = 0$
$(y+4)^2 - 16 - 8x + 32 = 0$
$(y+4)^2 - 8x + 16 = 0$
$(y+4)^2 = 8x - 16$
$y + 4 = \pm\sqrt{8x - 16}$
$y = -4 + \sqrt{8x - 16} \vee y = -4 - \sqrt{8x - 16}$
Voer in $y_1 = -4 + \sqrt{8x - 16}$ en $y_2 = -4 - \sqrt{8x - 16}$. Zie een schets van K hiernaast.

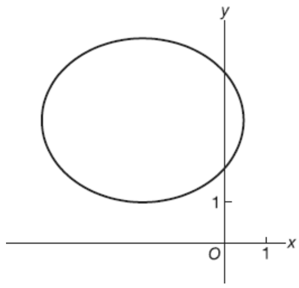




2b $(y+4)^2 = 8x - 16$
$(y+4)^2 = 8(x-2)$ ($2p = 8 \Rightarrow \frac{1}{2}p = 2$ en brandpunt op de horizontale symm. as)
K is een parabool met top $T(2, -4)$, brandpunt $F(4, -4)$ en richtlijn $x = 0$ (de y-as).

3a $4x^2 + 6y^2 + 16x - 36y + 46 = 0$
$4x^2 + 16x + 6y^2 - 36y + 46 = 0$
$4(x^2 + 4x) + 6(y^2 - 6y) + 46 = 0$
$4((x+2)^2 - 4) + 6((y-3)^2 - 9) + 46 = 0$
$4(x+2)^2 - 16 + 6(y-3)^2 - 54 + 46 = 0$
$6(y-3)^2 = 24 - 4(x+2)^2$
$(y-3)^2 = 4 - \frac{2}{3}(x+2)^2$

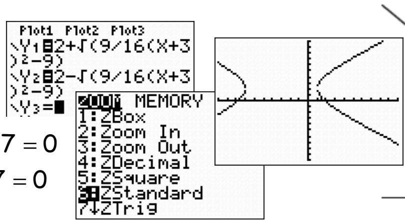


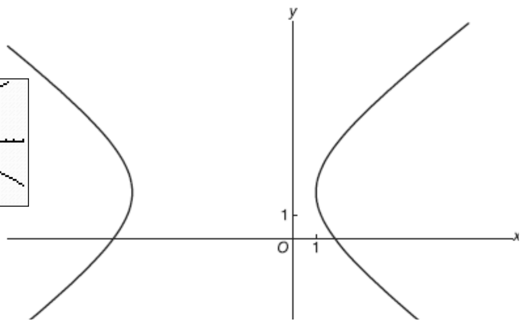


$y - 3 = \pm\sqrt{4 - \frac{2}{3}(x+2)^2} \Rightarrow y = 3 + \sqrt{4 - \frac{2}{3}(x+2)^2} \vee y = 3 - \sqrt{4 - \frac{2}{3}(x+2)^2}$
Voer in $y_1 = 3 + \sqrt{4 - \frac{2}{3}(x+2)^2}$ en $y_2 = 3 - \sqrt{4 - \frac{2}{3}(x+2)^2}$. Zie een schets van K hierboven.

3b $4(x+2)^2 - 16 + 6(y-3)^2 - 54 + 46 = 0$
$4(x+2)^2 + 6(y-3)^2 = 24$
$\frac{(x+2)^2}{6} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ ($a^2 = 6 > b^2 = 4 \Rightarrow$ brandpunten op de horizontale symm. as en $c^2 = a^2 - b^2 = 6 - 4 = 2$)
K is een ellips met middelpunt $(-2, 3)$ en toppen $(-2 + \sqrt{6}, 3)$, $(-2 - \sqrt{6}, 3)$, $(-2, 5)$ en $(-2, 1)$.
De brandpunten zijn $F_1(-2 + \sqrt{2}, 3)$ en $F_2(-2 - \sqrt{2}, 3)$.

4a $9x^2 - 16y^2 + 54x + 64y - 127 = 0$
$9x^2 + 54x - 16y^2 + 64y - 127 = 0$
$9(x^2 + 6x) - 16(y^2 - 4y) - 127 = 0$
$9((x+3)^2 - 9) - 16((y-2)^2 - 4) - 127 = 0$
$9(x+3)^2 - 81 - 16(y-2)^2 + 64 - 127 = 0$
$16(y-2)^2 = 9(x+3)^2 - 144$
$(y-2)^2 = \frac{9}{16}(x+3)^2 - 9$



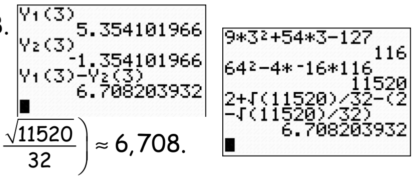


$y - 2 = \pm\sqrt{\frac{9}{16}(x+3)^2 - 9} \Rightarrow y = 2 + \sqrt{\frac{9}{16}(x+3)^2 - 9} \vee y = 2 - \sqrt{\frac{9}{16}(x+3)^2 - 9}$
Voer in $y_1 = 2 + \sqrt{\frac{9}{16}(x+3)^2 - 9}$ en $y_2 = 2 - \sqrt{\frac{9}{16}(x+3)^2 - 9}$. Zie een schets van K hierboven.

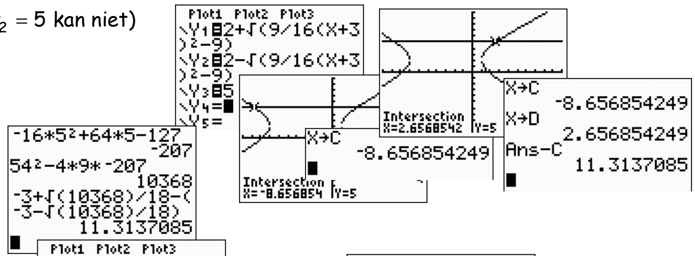
4b $9(x+3)^2 - 81 - 16(y-2)^2 + 64 - 127 = 0$
$9(x+3)^2 - 16(y-2)^2 = 144$
$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ ($a^2 = 16 > b^2 = 9 \Rightarrow$ brandpunten op de horizontale symm. as en $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$)
K is een hyperbool met middelpunt $(-3, 2)$, toppen $(-7, 2)$ en $(1, 2)$ en brandpunten $F_1(-8, 2)$ en $F_2(2, 2)$.

Asymptoten van de hyperbool: $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=0 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{16}=\frac{(y-2)^2}{9} \Rightarrow \frac{y-2}{3}=\pm\frac{x+3}{4} \Rightarrow y-2=\pm\frac{3}{4}(x+3)$.
De asymptoten zijn: $y-2=\frac{3}{4}(x+3)$ of $y=\frac{3}{4}x+4\frac{1}{4}$ en $y-2=-\frac{3}{4}(x+3)$ of $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$.

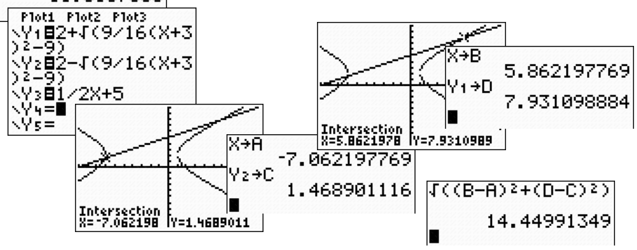
4c $x=3 \Rightarrow y_1(3)\approx 5{,}3541...$ en $y_2(3)\approx -1{,}3541...$ Dus $d(A,B)=y_1(3)-y_2(3)\approx 6{,}708$.
Of $x=3 \Rightarrow 9\cdot 3^2-16y^2+54\cdot 3+64y-127=0$
$-16y^2+64y+116=0$
$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-64\pm\sqrt{64^2-4\cdot -16\cdot 116}}{-32}=2\mp\frac{\sqrt{11520}}{32}$. Dus $AB=2+\frac{\sqrt{11520}}{32}-\left(2-\frac{\sqrt{11520}}{32}\right)\approx 6{,}708$.



4d $y_1=5$ (intersect) $\Rightarrow x_C\approx -8{,}6568...$ en $x_D\approx 2{,}6568...$ ($y_2=5$ kan niet)
Dus $d(C,D)=x_D-x_C\approx 11{,}314$.
Of $y=5 \Rightarrow 9x^2-16\cdot 5^2+54x+64\cdot 5-127=0$
$9x^2+54x-207=0$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-54\pm\sqrt{54^2-4\cdot 9\cdot -207}}{18}=-3\pm\frac{\sqrt{10368}}{18}$.
Dus $CD=-3+\frac{\sqrt{10368}}{18}-\left(-3-\frac{\sqrt{10368}}{18}\right)\approx 11{,}314$.



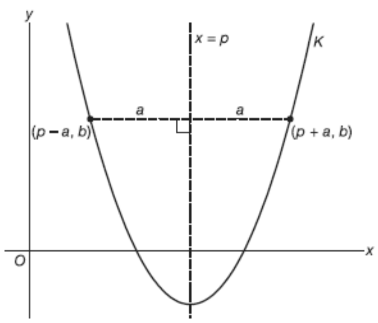
4e $x-2y+10=0$ of $y=\frac{1}{2}x+5$.
$y_1=\frac{1}{2}x+5$ (intersect) $\Rightarrow x_E\approx -7{,}0621...$ en $y_E\approx 1{,}4689...$
$y_2=\frac{1}{2}x+5$ (intersect) $\Rightarrow x_F\approx 5{,}8621...$ en $y_F\approx 7{,}9310...$
$d(E,F)=\sqrt{(x_F-x_E)^2+(y_F-y_E)^2}\approx 14{,}450$.

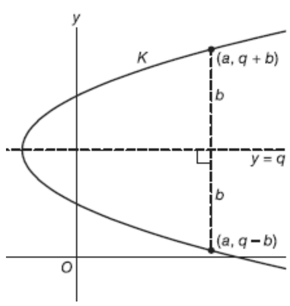


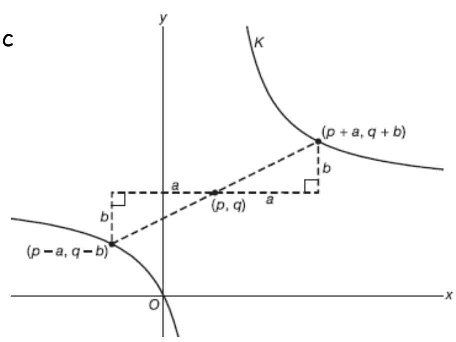
5a (a,b) ligt op de ellips (dus voldoet aan de vergelijking van de ellips) $4x^2+y^2=100 \Rightarrow 4a^2+b^2=100$ (*).
$(a,-b)$ invullen in de vergelijking $4x^2+y^2=100$ geeft $4a^2+(-b)^2=100$ ofwel $4a^2+b^2=100$ (klopt zie *).
Dus $(a,-b)$ ligt ook op de ellips (voldoet aan de vergelijking) $4x^2+y^2=100$.

5b $(-a,b)$ invullen in de vergelijking $4x^2+y^2=100$ geeft $4\cdot(-a)^2+b^2=100$ ofwel $4a^2+b^2=100$ (klopt zie *).
Dus $(-a,b)$ ligt op de ellips $4x^2+y^2=100$.
$(-a,-b)$ invullen in de vergelijking $4x^2+y^2=100$ geeft $4\cdot(-a)^2+(-b)^2=100$ ofwel $4a^2+b^2=100$ (klopt zie *).
Dus $(-a,-b)$ ligt op de ellips $4x^2+y^2=100$.

5c (b,a) invullen in $4x^2+y^2=100$ geeft $4b^2+a^2=100$ (klopt niet). Dus (b,a) ligt niet op de ellips $4x^2+y^2=100$.

6a


6b


6c


7 $(a,-1+b)$ op K geeft
$9a^2-4(-1+b)^2-36a-8(-1+b)-4=0$
$9a^2-4(1-2b+b^2)-36a+8-8b-4=0$
$9a^2-4+8b-4b^2-36a+8-8b-4=0$
$9a^2-4b^2-36a=0$...**(1)**

$(a,-1-b)$ op K geeft
$9a^2-4(-1-b)^2-36a-8(-1-b)-4=0$
$9a^2-4(1+2b+b^2)-36a+8+8b-4=0$
$9a^2-4-8b-4b^2-36a+8+8b-4=0$
$9a^2-4b^2-36a=0$...**(2)**

Uit **(1)** en **(2)** volgt $(a,-1-b)$ op $K \Leftrightarrow (a,-1-b)$ op K, dus K is symmetrisch in de lijn $y=-1$.

8a $(a,-4+b)$ op K geeft
$(-4+b)^2-8a+8(-4+b)+32=0$
$16-8b+b^2-8a-32+8b+32=0$
$b^2-8a+16=0$...**(1)**

$(a,-4-b)$ op K geeft
$(-4-b)^2-8a+8(-4-b)+32=0$
$16+8b+b^2-8a-32-8b+32=0$
$b^2-8a+16=0$...**(2)**

Uit **(1)** en **(2)** volgt $(a,-4+b)$ op $K \Leftrightarrow (a,-4-b)$ op K, dus K is symmetrisch in de lijn $y=-4$.

8b $(-2+a, 3+b)$ op L geeft

$4(-2+a)^2+6(3+b)^2+16(-2+a)-36(3+b)+46=0$

$4(4-4a+a^2)+6(9+6b+b^2)-32+16a-108-36b+46=0$

$16-16a+4a^2+54+36b+6b^2-32+16a-108-36b+46=0$

$4a^2+6b^2-24=0\ldots$**(1)**

$(-2-a, 3-b)$ op L geeft

$4(-2-a)^2+6(3-b)^2+16(-2-a)-36(3-b)+46=0$

$4(4+4a+a^2)+6(9-6b+b^2)-32-16a-108+36b+46=0$

$16+16a+4a^2+54-36b+6b^2-32-16a-108+36b+46=0$

$4a^2+6b^2-24=0\ldots$**(2)**

Uit **(1)** en **(2)** volgt $(-2+a, 3+b)$ op $L \Leftrightarrow (-2-a, 3-b)$ op L, dus L is symmetrisch in het punt $(-2, 3)$.

8c (a, b) op p geeft

$a^2+b^2-2ab-2a-2b-3=0\ldots$**(1)**

(b, a) op p geeft $b^2+a^2-2ba-2b-2a-3=0$

$a^2+b^2-2ab-2a-2b-3=0\ldots$**(2)**

Uit **(1)** en **(2)** volgt (a, b) op $p \Leftrightarrow (b, a)$ op p, dus p is symmetrisch in de lijn $y=x$.

9 Bij opgave 2 zijn de functies $y=-4+\sqrt{8x-16}$ en $y=-4-\sqrt{8x-16}$.
Op de kromme van opgave 2 liggen de punten $\left(a,\ -4+\sqrt{8a-16}\right)$ en $\left(a,\ -4-\sqrt{8a-16}\right)$ ofwel $\left(a,\ -4+b\right)$ en $\left(a,\ -4-b\right)$ met $b=\sqrt{8a-16}$.
Dus de kromme van opgave 2 is symmetrisch in de lijn $y=-4$.

Bij opgave 3 zijn de functies $y=3+\sqrt{4-\frac{2}{3}(x+2)^2}$ en $y=3-\sqrt{4-\frac{2}{3}(x+2)^2}$.
Op de kromme van opgave 3 liggen de punten $\left(a, 3+\sqrt{4-\frac{2}{3}(a+2)^2}\right)$ en $\left(a, 3-\sqrt{4-\frac{2}{3}(a+2)^2}\right)$ ofwel $\left(a, 3+b\right)$ en $\left(a, 3-b\right)$ met $b=\sqrt{4-\frac{2}{3}(a+2)^2}$.
Dus de kromme van opgave 3 is symmetrisch in de lijn $y=3$.

Bij opgave 4 zijn de functies $y=2+\sqrt{\frac{9}{16}(x+3)^2-9}$ en $y=2-\sqrt{\frac{9}{16}(x+3)^2-9}$.
Op de kromme van opgave 4 liggen de punten $\left(a, 2+\sqrt{\frac{9}{16}(a+3)^2-9}\right)$ en $\left(a, 2-\sqrt{\frac{9}{16}(a+3)^2-9}\right)$ ofwel $\left(a, 2+b\right)$ en $\left(a, 2-b\right)$ met $b=\sqrt{\frac{9}{16}(a+3)^2-9}$.
Dus de kromme van opgave 4 is symmetrisch in de lijn $y=2$.

10a $(-3+a, 2+b)$ op K geeft

$9(-3+a)^2-16(2+b)^2+54(-3+a)+64(2+b)-127=0$

$9(9-6a+a^2)-16(4+4b+b^2)-162+54a+128+64b-127=0$

$81-54a+9a^2-64-64b-16b^2-161+54a+64b=0$

$9a^2-16b^2-144=0\ldots$**(1)**

$(-3-a, 2-b)$ op K geeft

$9(-3-a)^2-16(2-b)^2+54(-3-a)+64(2-b)-127=0$

$9(9+6a+a^2)-16(4-4b+b^2)-162-54a+128-64b-127=0$

$81+54a+9a^2-64+64b-16b^2-161-54a-64b=0$

$9a^2-16b^2-144=0\ldots$**(2)**

Uit **(1)** en **(2)** volgt $(-3+a, 2+b)$ op $K \Leftrightarrow (-3-a, 2-b)$ op K, dus K is symmetrisch in het punt $(-3, 2)$.

10b Translatie van K over $(3, -2) \Rightarrow$ vervang x door $x-3$ en y door $y+2$.

L: $9(x-3)^2-16(y+2)^2+54(x-3)+64(y+2)-127=0$

$9(x^2-6x+9)-16(y^2+4y+4)+54x-162+64y+128-127=0$

$9x^2-54x+81-16y^2-64y+64+54x-162+64y+128-127=0$

$9x^2-16y^2-144=0$ ofwel $9x^2-16y^2=144$ ofwel $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

11 $k=\frac{1}{2}$, want het beeld van $x^2+4y^2=100$ is dan
$(2x)^2+4y^2=100$ ofwel $4x^2+4y^2=100$ ofwel $x^2+y^2=25$.

12a $x^2+y^2-6x-4y-3=0$

$x^2-6x+y^2-4y-3=0$

$(x-3)^2-9+(y-2)^2-4-3=0$

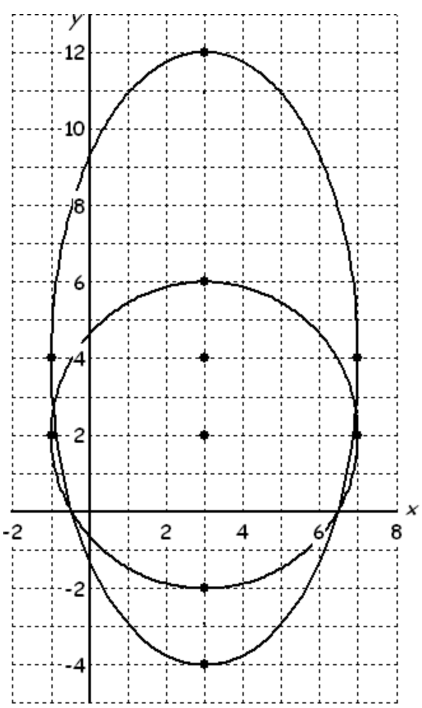
$(x-3)^2+(y-2)^2=16.$

Dit is een cirkel met $M(3, 2)$ en $r=4$.

12b

Punten van de cirkel	Punten van de ellips
$M(3, 2)$	$M'(3, 4)$
$(7, 2)$	$(7, 4)$
$(3, 6)$	$(3, 12)$
$(-1, 2)$	$(-1, 4)$
$(3, -2)$	$(3, -4)$

door enkele punten van de cirkel t.o.v. de x-as te vermenigvuldigen met 2 ontstaat inderdaad de ellips in het voorbeeld



13 Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ vervang x door $-2x$.

L: $(-2x)^2 + y^2 - 6 \cdot -2x - 4y - 3 = 0$

$4x^2 + y^2 + 12x - 4y - 3 = 0$

$4x^2 + 12x + y^2 - 4y - 3 = 0$

$4(x^2 + 3x) + y^2 - 4y - 3 = 0$

$4\left((x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}\right) + (y-2)^2 - 4 - 3 = 0$

$4(x + \frac{3}{2})^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 3 = 0$

$4(x + \frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 = 16$ ofwel $\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.

L is een ellips met middelpunt $(-\frac{3}{2}, 2)$.

$a^2 = 4$ en $b^2 = 16 \Rightarrow a^2 < b^2$ en $c^2 = b^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$.

De toppen zijn $(-\frac{3}{2} - 2, 2) = (-3\frac{1}{2}, 2)$, $(-\frac{3}{2} + 2, 2) = (\frac{1}{2}, 2)$,

$(-\frac{3}{2}, 2 - 4) = (-1\frac{1}{2}, -2)$ en $(-\frac{3}{2}, 2 + 4) = (-1\frac{1}{2}, 6)$.

De brandpunten zijn $(-\frac{3}{2}, 2 - \sqrt{12}) = (-1\frac{1}{2}, 2 - 2\sqrt{3})$

en $(-\frac{3}{2}, 2 + \sqrt{12}) = (-1\frac{1}{2}, 2 + 2\sqrt{3})$.

14a Het middelpunt is $(2, 4) \Rightarrow$ de vergelijking van de vorm $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} = 1$.

De horizontale as van de ellips is 4 lang $\Rightarrow a = 2$ en de verticale van de ellips as is 6 lang $\Rightarrow b = 3$.

Dus de vergelijking van de ellips e is $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$.

14b De horizontale as van de ellips is 4 lang en de verticale van de ellips as is 6 lang.

Dus ten opzichte van de y-as vermenigvuldigen met $\frac{3}{2} \Rightarrow x$ vervangen in e door $\frac{2}{3}x$.

$\frac{(\frac{2}{3}x - 2)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

$9(\frac{2}{3}x - 2)^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$9(\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4) + 4(y-4)^2 = 36$

$4x^2 - 24x + 36 + 4(y-4)^2 = 36$

$4(x^2 - 6x + 9) + 4(y-4)^2 = 36$

$4(x-3)^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$.

Dit is een cirkel met middepunt (3, 4) en straal 3.

14c $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(\frac{3}{2}y - 4)^2}{9} = 1$

$9(x-2)^2 + 4(\frac{3}{2}y - 4)^2 = 36$

$9(x-2)^2 + 4(\frac{9}{4}y^2 - 12y + 16) = 36$

$9(x-2)^2 + 9y^2 - 48y + 64 = 36$

$9(x-2)^2 + 9(y^2 - \frac{16}{3}y + \frac{64}{9}) = 36$

$9(x-2)^2 + 9(y - \frac{8}{3})^2 = 36$

$(x-2)^2 + (y - \frac{8}{3})^2 = 4$.

Dit is een cirkel met middepunt $(2, \frac{8}{3})$ en straal 2.

14c De horizontale as van de ellips is 4 lang en de verticale van de ellips as is 6 lang.

Dus ten opzichte van de x-as vermenigvuldigen met $\frac{2}{3} \Rightarrow y$ vervangen in e door $\frac{3}{2}y$. (zie de uitwerking hierboven)

15a De top van parabool p (met opening naar rechts) is $(3, 1) \Rightarrow$ de vergelijking van de vorm $(y-1)^2 = 2p(x-3)$.

$(4, 3)$ ligt op $p \Rightarrow (3-1)^2 = 2p(4-3) \Rightarrow 4 = 2p$.

Dus p: $(y-1)^2 = 4(x-3)$ (met brandpunt $(3 + \frac{1}{2}p,\ 1) = (4,\ 1)$ en richtlijn $x = 3 + \frac{1}{2}p = 2$).

15b Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $k \Rightarrow x$ vervangen door $\frac{1}{k}x$.

Dit geeft als vergelijking voor de beeldgrafiek is $(y-1)^2 = 4(\frac{1}{k}x - 3)$ waarop het punt (6, 7) moet liggen.

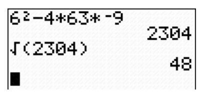
Dus $(7-1)^2 = 4(\frac{1}{k} \cdot 6 - 3) \Rightarrow 36 = \frac{24}{k} - 12 \Rightarrow 48 = \frac{24}{k} \Rightarrow k = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$.

Dus vergelijking van de beeldgrafiek is $(y-1)^2 = 4(2x-3)$ ofwel $(y-1)^2 = 8(x - \frac{3}{2})$ met top $(\frac{3}{2}, 1) = (\frac{1}{2} \cdot 3, 1)$ (klopt).

15c Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met $k \Rightarrow y$ vervangen door $\frac{1}{k}y$.

Dit geeft als vergelijking voor de beeldgrafiek is $(\frac{1}{k}y - 1)^2 = 4(x-3)$ waarop het punt (19, 3) moet liggen.

Dus $(\frac{1}{k} \cdot 3 - 1)^2 = 4(19-3) \Rightarrow \frac{9}{k^2} - \frac{6}{k} + 1 = 4 \cdot 16 \Rightarrow \frac{9}{k^2} - \frac{6}{k} - 63 = 0 \Rightarrow 63k^2 + 6k - 9 = 0$



met $D = 6^2 - 4 \cdot 63 \cdot -9 = 2304 \Rightarrow k = \frac{-6-48}{126}$ (negatief) $\vee$ $k = \frac{-6+48}{126} = \frac{42}{126} = \frac{1}{3}$ (deze wordt gezocht).

$k = \frac{1}{3}$ geeft $(3y-1)^2 = 4(x-3) \Rightarrow 3^2 \cdot (y - \frac{1}{3})^2 = 4(x-3)) \Rightarrow (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9}(x-3)$ met top $(3, \frac{1}{3}) = (3, \frac{1}{3} \cdot 1)$ (klopt).

15d De top $(3, 1)$ wordt afgebeeld op $(6, 2) \Rightarrow$ de factor is 2.

Dus x vervangen door $\frac{1}{2}x$ en y vervangen door $\frac{1}{2}y$.

Dus $(\frac{1}{2}y - 1)^2 = 4(\frac{1}{2}x - 3) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(y-2)\right)^2 = 2x - 12 \Rightarrow \frac{1}{4}(y-2)^2 = 2x - 12 \Rightarrow (y-2)^2 = 8x - 48 \Rightarrow (y-2)^2 = 8(x-6)$.

$(y-2)^2 = 8(x-6)$ is de vergelijking van een parabool.

16a Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $k \Rightarrow x$ vervangen door $\frac{1}{k}x$.
Dus $(y-y_T)^2 = 2p(\frac{1}{k}x - x_T) \Rightarrow (y-y_T)^2 = \frac{2p}{k}(x - kx_T)$. Ook dit is de vergelijking van een parabool.

16b Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $k \Rightarrow x$ vervangen door $\frac{1}{k}x$.
Dus $\frac{(\frac{1}{k}x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(\frac{1}{k})^2 \cdot (x - kx_M)^2}{a^2} + \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-kx_M)^2}{(ka)^2} + \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1$. Ook een ellips.

16c Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $k \Rightarrow x$ vervangen door $\frac{1}{k}x$.
Dus $\frac{(\frac{1}{k}x - x_M)^2}{a^2} - \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(\frac{1}{k})^2 \cdot (x - kx_M)^2}{a^2} - \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-kx_M)^2}{(ka)^2} - \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1$. Ook een hyperbool.

17a $y = 2 - \lambda \Rightarrow \lambda = 2 - y$.
$\lambda = 2 - y$ invullen in $x = 3 + 4\lambda \Rightarrow x = 3 + 4 \cdot (2 - y) = 3 + 8 - 4y$ ofwel $x + 4y = 11$.

17b $\lambda = 3 \Rightarrow y = 2 - 3 = -1$ én $x = 3 + 4 \cdot 3 = 15$. Je krijgt dus het punt $(15,\ -1)$.

17c Snijden met de y-as $(x = 0) \Rightarrow (x =) 3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 4\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$.

18a $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 - 2y - 8 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 8 = 0$
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$.
Dit is de cirkel met $M(2, 1)$ en $r = \sqrt{13}$.
Stel l: $y = a(x+6)$ ofwel $ax + 6a - y = 0$.
Raken betekent dat $d(M, l) = r$.
$\frac{|2a + 6a - 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{|8a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{13}$
$|8a - 1| = \sqrt{13a^2 + 13}$ (kwadrateren, zie hiernaast)

$(8a-1)^2 = 13a^2 + 13$
$64a^2 - 16a + 1 = 13a^2 + 13$
$51a^2 - 16a - 12 = 0$
$D = (-16)^2 - 4 \cdot 51 \cdot -12 = 2704 \Rightarrow \sqrt{D} = 52$
$a = \frac{16-52}{102} = \frac{-36}{102} = -\frac{6}{17} \vee a = \frac{16+52}{102} = \frac{68}{102} = \frac{2}{3}$.

```
16²-4*51*-12
             2704
√(2704)
               52
```

```
(16-52)/(2*51)▸F
rac
            -6/17
(16+52)/(2*51)▸F
rac
              2/3
```

l_1: $y = -\frac{6}{17}(x+6)$ ofwel $17y = -6(x+6)$ ofwel $6x + 17y = -36$ en
l_2: $y = \frac{2}{3}(x+6)$ ofwel $3y = 2(x+6)$ ofwel $-2x + 3y = 12$.

18b De poollijn van $(-6, 0)$ t.o.v. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ (met halfsubstitutie) is $-6x + 0y - 2x - 2 \cdot -6 - y - 0 - 8 = 0$.
Dus de poollijn is $-8x + 12 - y - 8 = 0$ ofwel $8x + y - 4 = 0$ ofwel $y = -8x + 4$.
De poollijn $y = -8x + 4$ snijden met de cirkel $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ geeft de raakpunten.
$x^2 + (-8x+4)^2 - 4x - 2(-8x+4) - 8 = 0$
$x^2 + 64x^2 - 64x + 16 - 4x + 16x - 8 - 8 = 0$
$65x^2 - 52x = 0$
$x(65x - 52) = 0$.
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{52}{65} = \frac{4}{5} \\ y = -8 \cdot \frac{4}{5} + 4 = -\frac{12}{5} \end{cases}$

```
52/65▸Frac
              4/5
-8*4/5+4▸Frac
            -12/5
```

De raaklijn in $(0, 4)$ aan $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ (met halfsubstitutie)
is $0x + 4y - 2x - 2 \cdot 0 - y - 4 - 8 = 0 \Rightarrow$ raaklijn l_1: $-2x + 3y - 12 = 0$.
De raaklijn in $(\frac{4}{5},\ -\frac{12}{5})$ aan $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ (met halfsubst.)
is $\frac{4}{5}x - \frac{12}{5}y - 2x - 2 \cdot \frac{4}{5} - y - -\frac{12}{5} - 8 = 0$ ofwel
$-\frac{6}{5}x - \frac{17}{5}y - \frac{36}{5} = 0 \Rightarrow$ raaklijn l_2: $6x + 17y + 36 = 0$.

```
4/5-2▸Frac
             -6/5
-12/5-1▸Frac
            -17/5
-2*4/5+12/5-8▸Fr
ac
            -36/5
```

18c *

19a Stel l: $x = -13 + \lambda \wedge y = 0 + a\lambda$.

19b $9(-13+\lambda)^2 + 25(a\lambda)^2 - 36(-13+\lambda) - 150a\lambda + 36 = 0$
$9(169 - 26\lambda + \lambda^2) + 25a^2\lambda^2 + 468 - 36\lambda - 150a\lambda + 36 = 0$
$1521 - 234\lambda + 9\lambda^2 + 25a^2\lambda^2 + 468 - 36\lambda - 150a\lambda + 36 = 0$
$(25a^2 + 9)\lambda^2 + (-150a - 270)\lambda + 2025 = 0$
$D = (-150a - 270)^2 - 4 \cdot (25a^2 + 9) \cdot 2025$
$= 22\,500a^2 + 81\,000a + 72\,900 - 202\,500a^2 - 72\,900 = -180\,000a^2 + 81\,000a$.

```
13²
              169
36*13
              468
```

```
9*169
             1521
9*26
              234
```

```
-234-36
             -270
1521+468+36
             2025
```

```
150²
            22500
150*270*2
            81000
270²
            72900
```

```
4*25*2025
           202500
4*9*2025
            72900
22500-202500
          -180000
```

Raken: $D = 0 \Rightarrow -180\,000a^2 + 81\,000a = 0 \Rightarrow a(-180\,000a + 81\,000) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = \frac{-81000}{-180000} = \frac{9}{20}$.

```
81000/180000▸Fra
c
             9/20
```

$\underline{r}_{l_1} = \binom{1}{a} = \binom{1}{0} \Rightarrow \underline{n}_{l_1} = \binom{0}{-1}$. Dus l_1: $0x - 1y = c$ door $A(-13, 0) \Rightarrow c = 0$. Je vindt l_1: $y = 0$.

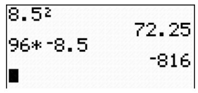
```
0*-13-1*0
                0
```

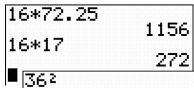
$\underline{r}_{l_2} = \binom{1}{\frac{9}{20}} \triangleq \binom{20}{9} \Rightarrow \underline{n}_{l_2} = \binom{9}{-20}$. Dus l_2: $9x - 20y = c$ door $A(-13, 0) \Rightarrow c = -117$. Je vindt l_2: $9x - 20y = -117$.

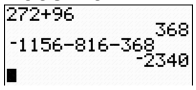
```
9*-13-20*0
             -117
```

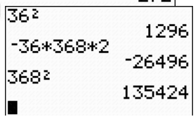
20 Stel l: $x = 0 + a\lambda = a\lambda \wedge y = -8\frac{1}{2} + \lambda$. (ga verder op het volgende blad)

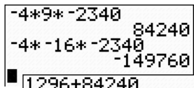
$9(a\lambda)^2 - 16(-8{,}5 + \lambda)^2 - 36a\lambda + 96(-8{,}5 + \lambda) - 368 = 0$
$9a^2\lambda^2 - 16(72{,}25 - 17\lambda + \lambda^2) - 36a\lambda - 816 + 96\lambda - 368 = 0$
$9a^2\lambda^2 - 1156 + 272\lambda - 16\lambda^2 - 36a\lambda - 816 + 96\lambda - 368 = 0$
$(9a^2 - 16)\lambda^2 + (-36a + 368)\lambda - 2\,340 = 0$
$D = (-36a + 368)^2 - 4 \cdot (9a^2 - 16) \cdot -2\,340$
$\quad = 1296a^2 - 26\,496a + 135\,424 + 84\,240a^2 - 149\,760 = 85\,536a^2 - 26\,496a - 14\,336.$

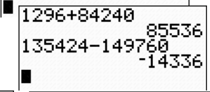




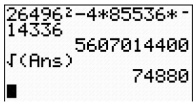


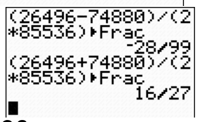




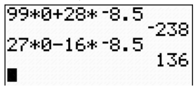


Raken: $D = 0 \Rightarrow 85\,536a^2 - 26\,496a - 14\,336 = 0$
$D = 26\,496^2 - 4 \cdot 85\,536 \cdot -14\,336 = 5\,607\,014\,400$ en $\sqrt{D} = 74\,880.$
Zo vind je: $a = \frac{26496 - 74880}{2 \cdot 85536} = -\frac{28}{99} \vee a = \frac{26496 + 74880}{2 \cdot 85536} = \frac{16}{27}.$





$\underline{r}_{l_1} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28}{99} \\ 1 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -28 \\ 99 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n}_{l_1} = \begin{pmatrix} 99 \\ 28 \end{pmatrix}$. Dus l_1: $99x + 28y = c$ door $A(0;\ -8{,}5) \Rightarrow l_1$: $99x + 28y = -238.$
$\underline{r}_{l_2} = \begin{pmatrix} \frac{16}{27} \\ 1 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n}_{l_2} = \begin{pmatrix} 27 \\ -16 \end{pmatrix}$. Dus l_2: $27x - 16y = c$ door $A(0;\ -8{,}5) \Rightarrow l_2$: $27x - 16y = 136.$



21a $x = \cos(\varphi)$ én $y = \sin(\varphi) \Rightarrow x^2 + y^2 = (\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$. Dus $x^2 + y^2 = 1$.

21b De eenheidscirkel (de cirkel met de oorsprong als middelpunt en straal 1).

✲✲✲ **Neem GR - practicum 10 door.** (zie aan het eind van deze uitwerkingen)

22a Voor het punt P geldt $x = -4 + 3\cos(\varphi) \wedge y = 2 + 3\sin(\varphi)$.
Dit geeft $R\left(\frac{-4 + 3\cos(\varphi)}{2}, \frac{2 + 3\sin(\varphi) + 6}{2}\right) = R\left(\frac{-4 + 3\cos(\varphi)}{2}, \frac{8 + 3\sin(\varphi)}{2}\right) = R\left(-2 + 1\tfrac{1}{2}\cos(\varphi), 4 + 1\tfrac{1}{2}\sin(\varphi)\right)$.
Dus R ligt op de cirkel $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = \left(1\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2\tfrac{1}{4}$.

22b Voor het punt P geldt $x = -4 + 3\cos(\varphi) \wedge y = 2 + 3\sin(\varphi)$.
Voor het punt S geldt $x = x_S$ met $x_S > 0$ en $y = 0$.
Voor het midden T van PS geldt $T\left(\frac{-4 + 3\cos(\varphi) + x_S}{2}, \frac{2 + 3\sin(\varphi) + 0}{2}\right) = T\left(\tfrac{1}{2}x_S - 2 + 1\tfrac{1}{2}\cos(\varphi), 1 + 1\tfrac{1}{2}\sin(\varphi)\right)$.
Dus T ligt op de cirkel met middelpunt $\left(\tfrac{1}{2}x_S - 2, 1\right)$. Dus $\tfrac{1}{2}x_S - 2 = 5 \Rightarrow \tfrac{1}{2}x_S = 7 \Rightarrow x_S = 14$. Dus $S(14, 0)$.

23a Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met $2 \Rightarrow y = 2\sin(\varphi)$.
Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $3 \Rightarrow x = 3\cos(\varphi)$.
Dus K: $x = 3\cos(\varphi) \wedge y = 2\sin(\varphi)$ met $0 \le \varphi \le 2\pi$.

23b $\begin{cases} x = 3\cos(\varphi) \\ y = 2\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6\cos(\varphi) \\ 3y = 6\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow$
$(2x)^2 + (3y)^2 = (6\cos(\varphi))^2 + (6\sin(\varphi))^2 = 36\cos^2(\varphi) + 36\sin^2(\varphi) = 36\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = 36 \cdot 1 = 36.$
Dus K is de ellips $4x^2 + 9y^2 = 36$ ofwel $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

24a $\begin{cases} x = 3 + 4\cos(\varphi) \\ y = 1 + 2\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 4\cos(\varphi) \\ 2y = 2 + 4\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 4\cos(\varphi) \\ 2y - 2 = 4\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow$
$(x - 3)^2 + (2y - 2)^2 = (4\cos(\varphi))^2 + (4\sin(\varphi))^2 = 16\cos^2(\varphi) + 16\sin^2(\varphi) = 16\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = 16 \cdot 1 = 16.$

24b $(x - 3)^2 + (2y - 2)^2 = 16$ ofwel $(x - 3)^2 + 2^2(y - 1)^2 = 16$ ofwel $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.
Dus K is de ellips met middelpunt $(3, 1)$. ($a^2 = 16 > b^2 = 4 \Rightarrow$ brandpunten op de hor. symm. as en $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$)
De toppen zijn $(3 - 4, 1) = (-1, 1)$, $(3 + 4, 1) = (7, 1)$, $(3, 1 + 2) = (3, 3)$ en $(3, 1 - 2) = (3,\ -1)$.
De brandpunten zijn $(3 - \sqrt{12}, 1) = (3 - 2\sqrt{3}, 1)$ en $(3 + 2\sqrt{3}, 1)$.

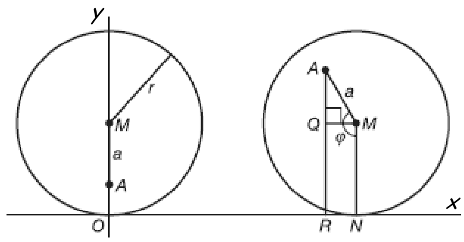
25a Het middelpunt van e is $(-4, 2)$. Verder is $a = \frac{|-7 - -1|}{2} = \frac{|-6|}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow a^2 = 9$ en $b = \frac{|0 - 4|}{2} = \frac{|-4|}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow b^2 = 4$.
Dus e: $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ ofwel $4(x + 4)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$.
Dit klopt als $2^2(x + 4)^2 + 3^2(y - 2)^2 = 6^2\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)$.
$\begin{cases} 2(x + 4) = 6\cos(\varphi) \\ 3(y - 2) = 6\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = 3\cos(\varphi) \\ y - 2 = 2\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow$ pv van e: $\begin{cases} x = -4 + 3\cos(\varphi) \\ y = 2 + 2\sin(\varphi). \end{cases}$

25b P op e: $x=-4+3\cos(\varphi) \wedge y=2+2\sin(\varphi)$ en $E(-2, 0)$.
Het midden Q van PE is $Q\left(\frac{-4+3\cos(\varphi)-2}{2}, \frac{2+2\sin(\varphi)+0}{2}\right)=Q\left(-3+1\frac{1}{2}\cos(\varphi), 1+\sin(\varphi)\right)$.
Een pv van de kromme waarop Q ligt is $x=-3+1\frac{1}{2}\cos(\varphi) \wedge y=1+\sin(\varphi)$.
$\begin{cases} x=-3+1\frac{1}{2}\cos(\varphi) \\ y=1+\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3=1\frac{1}{2}\cos(\varphi) \\ y-1=\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6=3\cos(\varphi) \\ 3y-3=3\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow$
$(2x+6)^2+(3y-3)^2=3^2\cos^2(\varphi)+3^2\sin^2(\varphi)=9\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)=9\cdot 1=9.$
Dus Q ligt op de ellips $2^2(x+3)^2+3^2(y-1)^2=9 \Rightarrow 4(x+3)^2+9(y-1)^2=9$.

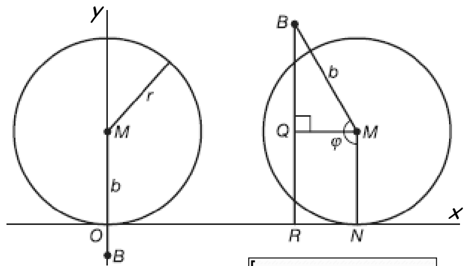
25c Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met $k \Rightarrow y$ vervangen door $\frac{1}{k}y$.
Je krijgt $x=-4+3\cos(\varphi) \wedge \frac{1}{k}y=2+2\sin(\varphi)$
$x=-4+3\cos(\varphi) \wedge y=2k+2k\sin(\varphi)$, omdat een cirkel ontstaat moet gelden $2k=3 \Rightarrow k=1\frac{1}{2}$.
Dit geeft als pv c_1: $x=-4+3\cos(\varphi) \wedge y=3+3\sin(\varphi)$ en als vergelijking c_1: $(x+4)^2+(y-3)^2=9$.

25d Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $k \Rightarrow x$ vervangen door $\frac{1}{k}x$.
Je krijgt $\frac{1}{k}x=-4+3\cos(\varphi) \wedge y=2+2\sin(\varphi)$
$x=-4k+3k\cos(\varphi) \wedge y=2+2\sin(\varphi)$, omdat een cirkel ontstaat moet gelden $3k=2 \Rightarrow k=\frac{2}{3}$.
Dit geeft als pv c_2: $x=-\frac{8}{3}+2\cos(\varphi) \wedge y=2+2\sin(\varphi)$ en als vergelijking c_2: $(x+\frac{8}{3})^2+(y-2)^2=4$.

26 Omtrek$_{\text{cirkel}}=2\pi r \Rightarrow L_{\text{boog } AB}=\frac{\varphi}{2\pi}\cdot 2\pi r=\varphi\cdot r=r\varphi$.

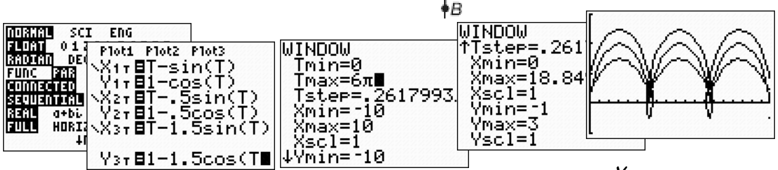


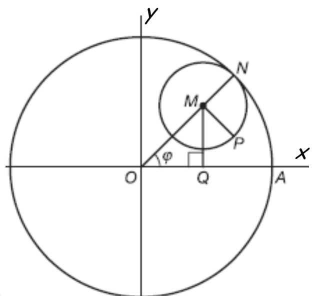
27a In ΔQMA: $\cos(\angle M)=\frac{QM}{AM} \Rightarrow QM=AM\cdot\cos(\angle M)=a\cos(\varphi-\frac{1}{2}\pi)=a\sin(\varphi)$.
$x_A=ON-RN=ON-QM=r\varphi-a\sin(\varphi)$.
en $\sin(\angle M)=\frac{AQ}{AM} \Rightarrow AQ=AM\cdot\sin(\angle M)=a\sin(\varphi-\frac{1}{2}\pi)=-a\cos(\varphi)$.
$y_A=QR+AQ=r-a\cos(\varphi)$.
Dus K_A: $x=r\varphi-a\sin(\varphi) \wedge y=r-a\cos(\varphi)$.
(het is gemakkelijker de formules af te leiden voordat een kwartslag is gedraaid)



27b In ΔQMB: $\cos(\angle M)=\frac{QM}{BM} \Rightarrow QM=BM\cdot\cos(\angle M)=b\cos(\varphi-\frac{1}{2}\pi)=b\sin(\varphi)$.
$x_B=ON-RN=ON-QM=r\varphi-b\sin(\varphi)$.
Verder is $\sin(\angle M)=\frac{BQ}{BM} \Rightarrow BQ=BM\cdot\sin(\angle M)=b\sin(\varphi-\frac{1}{2}\pi)=-b\cos(\varphi)$.
$y_B=QR+BQ=r-b\cos(\varphi)$.
Dus K_B: $x=r\varphi-b\sin(\varphi) \wedge y=r-b\cos(\varphi)$.

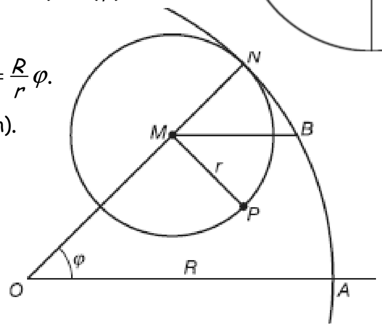
27c Voer in $x_{1T}=T-\sin(T)$, $y_{1T}=1-\cos(T)$,
$x_{2T}=T-0{,}5\sin(T)$, $y_{2T}=1-0{,}5\cos(T)$,
$x_{3T}=T-1{,}5\sin(T)$ en $y_{3T}=1-1{,}5\cos(T)$.
Zie een plot hiernaast.



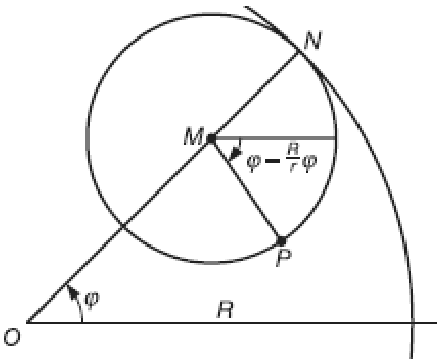


28a Zie de figuur hiernaast.
De straal van de grote cirkel is R en de straal van de kleine cirkel is r.
In ΔOMQ:
$\cos(\varphi)=\frac{OQ}{OM} \Rightarrow OQ=OM\cdot\cos(\varphi)=(ON-MN)\cdot\cos(\varphi)$. Dus $x_M=(R-r)\cos(\varphi)$.
In ΔOMQ:
$\sin(\varphi)=\frac{QM}{OM} \Rightarrow QM=OM\cdot\sin(\varphi)=(ON-MN)\cdot\sin(\varphi)$. Dus $y_M=(R-r)\sin(\varphi)$.

28b Zie de figuur naast 28a: Boog $AN=R\cdot\varphi$ en boog $NP=r\cdot\angle NMP$.
Er geldt: Boog $AN=$ boog $NP \Rightarrow R\cdot\varphi=r\cdot\angle NMP \Rightarrow \angle NMP=\frac{R\varphi}{r}=\frac{R}{r}\varphi$.



28c Zie de figuur hiernaast: $MB \parallel OA \Rightarrow \angle BMN=\angle AON=\varphi$ (F-hoeken).
$\angle BMP=\angle NMP-\angle BMN=\frac{R}{r}\varphi-\varphi$.
P draait in negatieve richting rond M, dus is
de draaihoek van MP is gelijk aan $-\left(\frac{R}{r}\varphi-\varphi\right)=\varphi-\frac{R}{r}\varphi$.

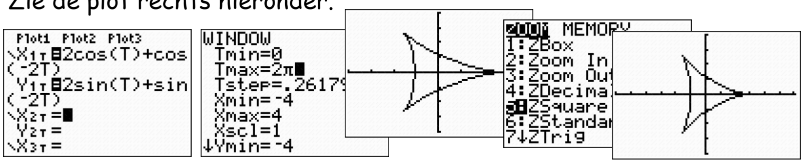


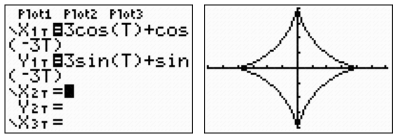
28d De draaihoek van OM is φ en de draaihoek van MP is $\varphi - \frac{R}{r}\varphi$.

$x_P = x_M + MP \cdot \cos\left(\varphi - \frac{R}{r}\varphi\right) = (R - r)\cos(\varphi) + r\cos\left(\varphi - \frac{R}{r}\varphi\right)$ en

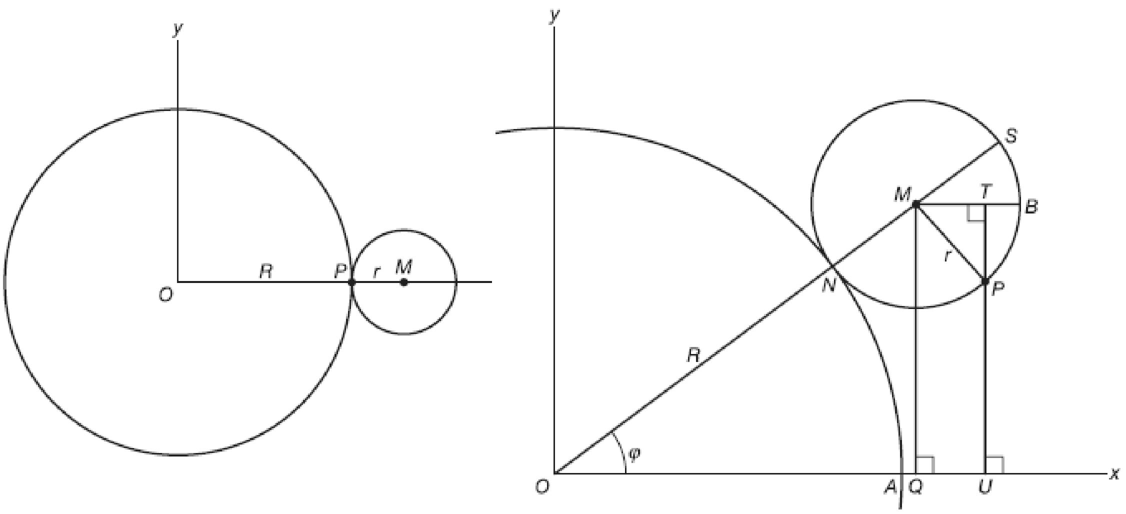
$y_P = y_M + MP \cdot \sin\left(\varphi - \frac{R}{r}\varphi\right) = (R - r)\sin(\varphi) + r\sin\left(\varphi - \frac{R}{r}\varphi\right)$.

28e Voer in $x_{1T} = 2\cos(T) + \cos(-2T)$ en $y_{1T} = 2\sin(T) + \sin(-2T)$.
Zie de plot hieronder.
Voer in $x_{1T} = 3\cos(T) + \cos(-3T)$ en $y_{1T} = 3\sin(T) + \sin(-3T)$.
Zie de plot rechts hieronder.





29



De linker figuur is de beginsituatie, bij de rechter figuur is de kleine cirkel over de grote cirkel gerold.
De grote cirkel ligt stil. De straal van de grote cirkel is R, de straal van de kleine cirkel is r.
Zie de figuur hiernaast.
De straal van de grote cirkel is R en de straal van de kleine cirkel is r.

In ΔOMQ geldt: $\cos(\angle MOQ) = \frac{OQ}{OM} \Rightarrow OQ = OM \cdot \cos(\angle MOQ) = (ON + MN) \cdot \cos(\angle MOQ) = (R + r)\cos(\varphi) = x_M$.

In ΔOMQ geldt: $\sin(\angle MOQ) = \frac{MQ}{OM} \Rightarrow MQ = OM \cdot \sin(\angle MOQ) = (ON + MN) \cdot \sin(\angle MOQ) = (R + r)\sin(\varphi) = y_M$.

Boog $AN = R\varphi$ en boog $NP = r \cdot \angle NMP$.

Er geldt: Boog AN = boog $NP \Rightarrow R\varphi = r \cdot \angle NMP \Rightarrow \angle NMP = \frac{R}{r}\varphi$.

$MB \parallel OA \Rightarrow \angle BMS = \angle UOS = \varphi$ (F-hoeken) en $\angle BMP = \pi - \angle BMS - \angle NMP = \pi - \varphi - \frac{R}{r}\varphi$.

In ΔMPT is $\cos(\angle PMT) = \frac{MT}{MP} \Rightarrow MT = MP \cdot \cos(\angle PMT) = MP \cdot \cos(\angle PMB)$

$= r \cdot \cos\left(\pi - \varphi - \frac{R}{r}\varphi\right) = r \cdot \cos\left(\pi - \left(\varphi + \frac{R}{r}\varphi\right)\right) = -r \cdot \cos\left(\varphi + \frac{R}{r}\varphi\right)$.

In ΔMPT is $\sin(\angle PMT) = \frac{PT}{MP} \Rightarrow PT = MP \cdot \sin(\angle PMT) = MP \cdot \sin(\angle PMB)$

$= r \cdot \sin\left(\pi - \varphi - \frac{R}{r}\varphi\right) = r \cdot \sin\left(\pi - \left(\varphi + \frac{R}{r}\varphi\right)\right) = r \cdot \sin\left(\varphi + \frac{R}{r}\varphi\right)$.

$x_P = OQ + QU = x_M + MT = (R + r)\cos(\varphi) - r\cos\left(\varphi + \frac{R}{r}\varphi\right)$ en

$y_P = UT - PT = y_M - PT = (R + r)\sin(\varphi) - r\sin\left(\varphi + \frac{R}{r}\varphi\right)$.

30a $x(t) = t^2 - 4t \Rightarrow x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t - 4$ en $y(t) = 2t - 6 \Rightarrow y'(t) = \frac{dy}{dt} = 2$.

30b T is de top $\Rightarrow$ het punt met de kleinste x-coördinaat.
$x(t) = t^2 - 4t$ heeft een minimum als $\frac{dx}{dt} = 0$.
$\frac{dx}{dt} = 0$ geeft de t-waarde van de top en hiermee zijn de coördinaten van de top te berekenen.

30c $\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2$.
$t = 2$ geeft $x = x(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$ en $y = y(2) = 2 \cdot 2 - 6 = 4 - 6 = -2$. Dus $T(-4,\ -2)$.

31a $\begin{cases} x = t^2 - 4 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}$.

Raaklijn evenwijdig met de x-as $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$ (teller = 0)

$3t^2 - 3 = 0 \wedge 2t \neq 0$

$3t^2 = 3 \wedge t \neq 0$

$t^2 = 1 \wedge t \neq 0$

$t = 1 \vee t = -1$. (hiernaast gaat het verder)

$t = 1$ geeft $x = 1^2 - 4 = -3$ en $y = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$.

$t = -1$ geeft $x = (-1)^2 - 4 = -3$ en $y = (-1)^3 - 3 \cdot -1 = 2$.

Dus raaklijn evenwijdig met x-as in $(-3,\ -2)$ en $(-3, 2)$.

Raaklijn evenwijdig met de y-as $\Rightarrow 2t = 0 \wedge 3t^2 - 3 \neq 0$

$t = 0$.

$t = 0$ geeft $x = 0^2 - 4 = -4$ en $y = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$.

Dus raaklijn evenwijdig met de y-as in $(-4, 0)$.

31b $x = -1 \wedge y = 0$ geeft $t^2 - 4 = -1 \wedge t^3 - 3t = 0$

$t^2 = 3 \wedge t(t^2 - 3) = 0$

$(t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}) \wedge (t = 0 \vee t^2 = 3)$

$t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$. (dus voor $t = \sqrt{3}$ en voor $t = -\sqrt{3}$ krijg je het punt $(-1, 0)$)

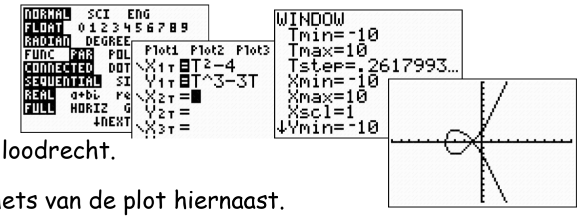
k: $y = a(x+1)$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3})^2 - 3}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$,

dus k: $y = \sqrt{3}(x+1)$ ofwel k: $y = x\sqrt{3} + \sqrt{3}$.

l: $y = a(x+1)$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (-\sqrt{3})^2 - 3}{-2\sqrt{3}} = \frac{6}{-2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$,

dus l: $y = -\sqrt{3}(x+1)$ ofwel l: $y = -x\sqrt{3} - \sqrt{3}$.

Omdat $rc_k \cdot rc_l = \sqrt{3} \cdot -\sqrt{3} = -3 \neq -1$ snijden k en l elkaar niet loodrecht.



31c Voer op de GR in: $X_{1T} = T^2 - 4$ en $Y_{1T} = T^3 - 3T$. Maak een schets van de plot hiernaast.

32a Snijpunten met de x-as $\Rightarrow y = 0$

$4\sin(t) = 0$

$\sin(t) = 0$ (met $0 \leq t \leq 2\pi$)

$t = 0 \vee t = \pi \vee t = 2\pi$.

$t = 0$ geeft $x = 2\cos(0) - 1 = 1$.

$t = \pi$ geeft $x = 2\cos(\pi) - 1 = -3$.

$t = 2\pi$ geeft $x = 2\cos(2\pi) - 1 = 1$.

Snijpunten met de x-as: $(1, 0)$ en $(-3, 0)$.

Snijpunten met de y-as $\Rightarrow x = 0$

$2\cos(t) - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos(t) = 1 \Rightarrow \cos(t) = \frac{1}{2}$ (met $0 \leq t \leq 2\pi$)

$t = \frac{1}{3}\pi \vee t = 2\pi - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{2}{3}\pi$.

$t = \frac{1}{3}\pi$ geeft $y = 4\sin(\frac{1}{3}\pi) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

$t = 1\frac{2}{3}\pi$ geeft $y = 4\sin(1\frac{2}{3}\pi) = 4 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$.

Snijpunten met de y-as: $(0, 2\sqrt{3})$ en $(0,\ -2\sqrt{3})$.

32b $-1 \leq \cos(t) \leq 1$

$-2 \leq 2\cos(t) \leq 2$

$-3 \leq 2\cos(t) - 1 \leq 1$

Dus $-3 \leq x \leq 1$.

$-1 \leq \sin(t) \leq 1$

$-4 \leq 4\sin(t) \leq 4$

Dus $-4 \leq y \leq 4$.

32c $\begin{cases} x = 2\cos(t) - 1 \\ y = 4\sin(t) \end{cases}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos(t)}{-2\sin(t)} = \frac{2\cos(t)}{-\sin(t)}$.

Raaklijn evenwijdig met de x-as $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$ (teller = 0)

$2\cos(t) = 0 \wedge -\sin(t) \neq 0$

$\cos(t) = 0 \wedge \sin(t) \neq 0$ (met $0 \leq t \leq 2\pi$)

$t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{2}\pi$.

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft $x = 2\cos(\frac{1}{2}\pi) - 1 = -1$ en $y = 4\sin(\frac{1}{2}\pi) = 4$.

$t = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x = 2\cos(1\frac{1}{2}\pi) - 1 = -1$ en $y = 4\sin(1\frac{1}{2}\pi) = -4$.

Dus raaklijn evenwijdig met de x-as in $(-1, 4)$ en $(-1,\ -4)$.

Raaklijn evenwijdig met de y-as

$-\sin(t) = 0 \wedge 2\cos(t) \neq 0$

$\sin(t) = 0 \wedge \cos(t) \neq 0$ (met $0 \leq t \leq 2\pi$)

$t = 0 \vee t = \pi \vee t = 2\pi$.

$t = 0$ geeft $x = 2\cos(0) - 1 = 1$ en $y = 4\sin(0) = 0$.

$t = \pi$ geeft $x = 2\cos(\pi) - 1 = -3$ en $y = 4\sin(\pi) = 0$.

$t = 2\pi$ geeft $x = 2\cos(2\pi) - 1 = 1$ en $y = 4\sin(2\pi) = 0$.

Dus raaklijn evenwijdig met de y-as in $(1, 0)$ en $(-3, 0)$.

32d Raaklijn evenwijdig met de lijn $y = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow$

$\frac{2\cos(t)}{-\sin(t)} = 2 \Rightarrow 2\cos(t) = -2\sin(t)$

$\cos(t) = -\sin(t)$

$\sin(t + \frac{1}{2}\pi) = \sin(t + \pi)$

$t + \frac{1}{2}\pi = t + \pi + k \cdot 2\pi \vee t + \frac{1}{2}\pi = \pi - (t + \pi) + k \cdot 2\pi$

$0 = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee t + \frac{1}{2}\pi = \pi - t - \pi + k \cdot 2\pi$

geen oplossing $\vee\ 2t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ (met $0 \leq t \leq 2\pi$)

$t = \frac{3}{4}\pi \vee t = 1\frac{3}{4}\pi$.

$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft $x = 2\cos(\frac{3}{4}\pi) - 1 = -\sqrt{2} - 1$ en $y = 4\sin(\frac{3}{4}\pi) = 2\sqrt{2}$.

$t = 1\frac{3}{4}\pi$ geeft $x = 2\cos(1\frac{3}{4}\pi) - 1 = \sqrt{2} - 1$ en $y = 4\sin(1\frac{3}{4}\pi) = -2\sqrt{2}$.

Raaklijn evenwijdig met $y = 2x$ in $(-\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2})$ en $(\sqrt{2} - 1,\ -2\sqrt{2})$.

32e $\left.\begin{array}{l} x = 2\cos(t) - 1 \Rightarrow x + 1 = 2\cos(t) \Rightarrow 2x + 2 = 4\cos(t) \\ y = 4\sin(t) \end{array}\right\} \Rightarrow (2x+2)^2 + y^2 = 16\cos^2(t) + 16\sin^2(t)$

$4(x+1)^2 + y^2 = 16(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 16 \cdot 1 = 16$

Dus K is een ellips met vergelijking $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

33a Vanwege $\ln(t)$ is er de beperking $t > 0$.

$x = t^2 - 4t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t - 4$.

$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2$.

$t = 2$ geeft $x = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$.

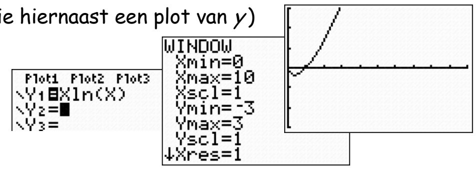
Dus $x \geq -4$. (de grafiek van x is een dalparabool)

$y = t \cdot \ln(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 \cdot \ln(t) + t \cdot \frac{1}{t} = \ln(t) + 1$.

$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \ln(t) + 1 = 0 \Rightarrow \ln(t) = -1 \Rightarrow t = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

$t = \frac{1}{e}$ geeft $y = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(e^{-1}\right) = \frac{1}{e} \cdot -1 = -\frac{1}{e}$.

Dus $y \geq -\frac{1}{e}$. (zie hiernaast een plot van y)



33b $t = 2$ (zie 33a) geeft $x = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$ (zie 33a) en $y = 2\ln(2)$.

Dus de raaklijn loopt evenwijdig met de y-as in $(-4, 2\ln(2))$.

$t = \frac{1}{e}$ (zie 33a) geeft $x = \left(\frac{1}{e}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e^2} - \frac{4}{e}$ en $y = -\frac{1}{e}$ (zie 33a).

Dus de raaklijn loopt evenwijdig met de x-as in $(\frac{1}{e^2} - \frac{4}{e}, -\frac{1}{e})$.

33c Snijpunt met de x-as ($y = 0$) $\Rightarrow t\ln(t) = 0$ (met de beperking $t > 0$)

$t = 0$ (vold. niet) $\vee$ $\ln(t) = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1$ met $x = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3$

Dus het snijpunt met de x-as is $(-3, 0)$.

$\begin{cases} x = t^2 - 4t \\ y = t\ln(t) \end{cases}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot \ln(t) + t \cdot \frac{1}{t}}{2t - 4} = \frac{\ln(t) + 1}{2t - 4}$.

Raaklijn $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=1} = \frac{\ln(1) + 1}{2 - 4} = \frac{0 + 1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

Raaklijn $y = -\frac{1}{2}x + b$ door $(-3, 0) \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} \cdot -3 + b = 1\frac{1}{2} + b \Rightarrow b = -1\frac{1}{2}$. Dus de raaklijn in $(-3, 0)$ is $y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

34a $\begin{cases} x = \frac{1}{4}t^2 - 1 \\ y = \frac{1}{4}t^2 - t \end{cases}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}t - 1}{\frac{1}{2}t} = \frac{t - 2}{t}$.

Raaklijn evenwijdig met de x-as: $t - 2 = 0 \wedge t \neq 0 \Rightarrow t = 2$.

$t = 2$ geeft $x = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 1 = 0$ en $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 = -1$. Dus de raaklijn in $(0, -1)$ loopt evenwijdig met de x-as.

Raaklijn evenwijdig met de y-as: $t = 0 \wedge t - 2 \neq 0 \Rightarrow t = 0 \wedge t \neq 2 \Rightarrow t = 0$.

$t = 0$ geeft $x = \frac{1}{4} \cdot 0^2 - 1 = -1$ en $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 - 0 = 0$. Dus de raaklijn in $(-1, 0)$ loopt evenwijdig met de y-as.

34b $y = x$ geeft $\frac{1}{4}t^2 - 1 = \frac{1}{4}t^2 - t \Rightarrow -1 = -t \Rightarrow t = 1$.

$t = 1$ geeft $x = \frac{1}{4} \cdot 1^2 - 1 = -\frac{3}{4}$ en $y = x = -\frac{3}{4}$. Dus $y = x$ snijdt K in $A(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

Stel l: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=1} = \left[\frac{t-2}{t}\right]_{t=1} = \frac{1-2}{1} = -1$.

l: $y = -x + b$ door $A(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}) \Rightarrow -\frac{3}{4} = \frac{3}{4} + b \Rightarrow -1\frac{1}{2} = b$. Dus l: $y = -x - 1\frac{1}{2}$.

34c Snijden met de (positieve) x-as ($y = 0$) $\Rightarrow \frac{1}{4}t^2 - t = 0 \Rightarrow t(\frac{1}{4}t - 1) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee \frac{1}{4}t = 1 \Rightarrow t = 0 \vee t = 4$.

$t = 0$ geeft $x = \frac{1}{4} \cdot 0^2 - 1 = -1$ (niet positief) en $t = 4$ geeft $x = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 1 = 4 - 1 = 3$. Dus $B(3, 0)$.

Stel m: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=4} = \left[\frac{t-2}{t}\right]_{t=4} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$.

m: $y = \frac{1}{2}x + b$ door $B(3, 0) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot 3 + b \Rightarrow -1\frac{1}{2} = b$. Dus m: $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

Snijden met de (positieve) y-as ($x = 0$) $\Rightarrow \frac{1}{4}t^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}t^2 = 1 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2 \vee t = -2$.

$t = 2$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 = 1 - 2 = -1$ (niet positief) en $t = -2$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - -2 = 1 + 2 = 3$. Dus $C(0, 3)$.

Stel n: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=-2} = \left[\frac{t-2}{t}\right]_{t=-2} = \frac{-2-2}{-2} = 2$.

n: $y = 2x + b$ door $C(0, 3) \Rightarrow 3 = 2 \cdot 0 + b \Rightarrow 3 = b$. Dus n: $y = 2x + 3$.

Snijden van m met n geeft $\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 2x + 3 \Rightarrow -1\frac{1}{2}x = 4\frac{1}{2} \Rightarrow x = -3$.

$x = -3$ en n: $y = 2x + 3$ geeft $y = 2 \cdot -3 + 3 = -3 \Rightarrow D(-3, -3)$.

34d $x = \frac{1}{4}t^2 - 1$ geeft $\frac{1}{4}t^2 = x + 1$. Dan $\frac{1}{4}t^2 = x + 1$ invullen in $y = \frac{1}{4}t^2 - t$ geeft $y = x + 1 - t \Rightarrow t = x + 1 - y$.

Nu $t = x + 1 - y$ weer invullen in $\frac{1}{4}t^2 = x + 1$ geeft $\frac{1}{4}(x + 1 - y)^2 = x + 1 \Rightarrow (x + 1 - y)(x + 1 - y) = 4(x + 1)$.

Haakjes wegwerken geeft $x^2 + x - xy + x + 1 - y - xy - y + y^2 = 4x + 4$. Dus K: $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y - 3 = 0$.

35a De kettingregel.

35b $(f(t))^2+4(g(t))^2=1$ (beide kanten de afgeleide naar t nemen, dus $\frac{d}{dt}$ nemen) geeft

$\frac{d}{dt}\left((f(t))^2+4(g(t))^2\right)=\frac{d}{dt}(1)$

$\frac{d}{dt}\left((f(t))^2\right)+\frac{d}{dt}\left(4(g(t))^2\right)=\frac{d}{dt}(1)$

$2f(t)\cdot f'(t)+8g(t)\cdot g'(t)=0$

$f(t)\cdot f'(t)+4g(t)\cdot g'(t)=0.$

of $x^2+4y^2=1$ (beide kanten $\frac{d}{dt}$ nemen met gebruik van de kettingregel)

$2x\cdot\frac{dx}{dt}+8y\cdot\frac{dy}{dt}=0$ (beide kanten delen door 2)

$x\cdot\frac{dx}{dt}+4y\cdot\frac{dy}{dt}=0.$

35c $x\cdot\frac{dx}{dt}+4y\cdot\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow x\cdot dx+4y\cdot dy=0\Rightarrow 4y\cdot dy=-x\cdot dx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{4y}=-\frac{x}{4y}.$

36a Horizontale raaklijn: $x^2+2y=0\wedge -2x+2y\neq 0\Rightarrow 2y=-x^2\wedge 2y\neq 2x\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2\wedge y\neq x.$

$y=-\frac{1}{2}x^2$ substitueren in K geeft $x^3+6x\cdot -\frac{1}{2}x^2-3\cdot(-\frac{1}{2}x^2)^2=0\Rightarrow x^3-3x^3-\frac{3}{4}x^4=0\Rightarrow -2x^3-\frac{3}{4}x^4=0.$

$2x^3+\frac{3}{4}x^4=0\Rightarrow x^3(2+\frac{3}{4}x)=0\Rightarrow x=0\vee\frac{3}{4}x=-2\Rightarrow x=0\vee x=-2\cdot\frac{4}{3}=-\frac{8}{3}.$

$x=0$ geeft $y=-\frac{1}{2}\cdot 0^2=0$ voldoet niet want $x=y(=0)$.

$x=-\frac{8}{3}$ geeft $y=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{8}{3})^2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{9}=-\frac{32}{9}$ voldoet.

Dus een horizontale raaklijn in $B(-\frac{8}{3},\ -\frac{32}{9})$.

36b $\frac{dy}{dx}=1\Rightarrow\frac{x^2+2y}{-2x+2y}=1\Rightarrow x^2+2y=-2x+2y\wedge -2x+2y\neq 0\Rightarrow x^2+2x=0\wedge y\neq x\Rightarrow x(x+2)=0\wedge y\neq x.$

Dit geeft dan $\left(x=0\vee x=-2\right)\wedge y\neq x.$

$x=0$ invullen in K geeft $0^3+6\cdot 0\cdot y-3y^2=0\Rightarrow 3y^2=0\Rightarrow y^2=0\Rightarrow y=0$ (voldoet niet omdat $y=x$).

$x=-2$ invullen in K geeft $(-2)^3+6\cdot -2\cdot y-3y^2=0\Rightarrow -8-12y-3y^2=0\Rightarrow 3y^2+12y+8=0.$

$D=12^2-4\cdot 3\cdot 8=12\cdot 12-12\cdot 8=12\cdot 4=48\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=4\cdot\sqrt{3}$

$x=-2$ geeft dan $y=\frac{-12-4\cdot\sqrt{3}}{6}=-2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\vee y=\frac{-12+4\cdot\sqrt{3}}{6}=-2+\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

De vergelijking van de raaklijn met rc $=1$ in $(-2,\ -2-\frac{2}{3}\sqrt{3})$ is $y=1\cdot(x+2)-2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ofwel $y=x-\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

De vergelijking van de raaklijn met rc $=1$ in $(-2,\ -2+\frac{2}{3}\sqrt{3})$ is $y=1\cdot(x+2)-2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ofwel $y=x+\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

37a $x=3$ invullen in K geeft $3^2+3\cdot y+y^2=9\Rightarrow y^2+3y=0\Rightarrow y(y+3)=0\Rightarrow y=0\vee y=-3$. Dus $A(3,0)$ en $B(3,\ -3)$.

$x^2+xy+y^2=9\Rightarrow 2xdx+ydx+xdy+2ydy=0\Rightarrow(x+2y)dy=(-2x-y)dx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{x+2y}.$

$rc_k=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{A(3,0)}=\frac{-6-0}{3+0}=-2$ en $rc_l=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{B(3,-3)}=\frac{-6+3}{3+-6}=\frac{-3}{-3}=1.$

De vergelijking van de raaklijn k in $A(3,0)$ is $y=2(x-3)$ ofwel $y=2x-6$.

De vergelijking van de raaklijn l in $B(3,\ -3)$ is $y=1(x-3)-3$ ofwel $y=x-6$.

37b Horizontale raaklijn: $-2x-y=0\wedge x+2y\neq 0\Rightarrow y=-2x\wedge x\neq -2y.$

$y=-2x$ substitueren in K geeft $x^2+x\cdot -2x+(-2x)^2=9\Rightarrow x^2-2x^2+4x^2=9\Rightarrow 3x^2=9\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}.$

$x=\sqrt{3}$ geeft $y=-2\cdot\sqrt{3}$ en $x=-\sqrt{3}$ geeft $y=2\cdot\sqrt{3}$ (voldoen want $x\neq 2y$).

Dus in de punten $(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$ en $(-\sqrt{3},2\sqrt{3})$ zijn de raaklijnen horizontaal.

Verticale raaklijn: $x+2y=0\wedge -2x-y\neq 0\Rightarrow x=-2y\wedge y\neq -2x.$

$x=-2y$ substitueren in K geeft $(-2y)^2+-2y\cdot y+y^2=9\Rightarrow 4y^2-2y^2+y^2=9\Rightarrow 3y^2=9\Rightarrow y^2=3\Rightarrow y=\pm\sqrt{3}.$

$y=\sqrt{3}$ geeft $x=-2\cdot\sqrt{3}$ en $y=-\sqrt{3}$ geeft $x=2\cdot\sqrt{3}$ (voldoen want $y\neq -2x$).

Dus in de punten $(-2\sqrt{3},\sqrt{3})$ en $(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ zijn de raaklijnen verticaal.

38a $9x^2-3y^2=y^3\Rightarrow 18xdx-6ydy=3y^2dy\Rightarrow 18xdx=(3y^2+6y)dy\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{18x}{3y^2+6y}=\frac{6x}{y^2+2y}.$

Raaklijn horizontaal (evenwijdig met de x-as): $6x=0\wedge y^2+2y\neq 0\Rightarrow x=0\wedge y(y+2)\neq 0.$

$x=0$ substitueren in K geeft $-3y^2=y^3\Rightarrow y^2=0$ (voldoet niet want $y=0$) $\vee\ -3=y$ (voldoet).

$x=\sqrt{3}$ geeft $y=-2\cdot\sqrt{3}$ en $x=-\sqrt{3}$ geeft $y=2\cdot\sqrt{3}$ (voldoen want $x\neq 2y$). Dus in $(0,\ -3)$ is een horizontale raaklijn.

Raaklijn verticaal (evenwijdig met de y-as): $y^2+2y=0\wedge 6x\neq 0\Rightarrow\left(y=0\vee y=-2\right)\wedge x\neq 0.$

$y=0$ substitueren in K geeft $9x^2-0=0\Rightarrow x^2=0$ (voldoet niet want $x=0$).

$y=-2$ substitueren in K geeft $9x^2-12=-8\Rightarrow 9x^2=4\Rightarrow x^2=\frac{4}{9}\Rightarrow x=\pm\frac{2}{3}$ (voldoen).

Dus in de punten $(\frac{2}{3},\ -2)$ en $(-\frac{2}{3},\ -2)$ is de raaklijn evenwijdig met de y-as.

38b $\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{6x}{y^2+2y} = 1 \Rightarrow 6x = y^2 + 2y \wedge y^2 + 2y \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{3}y \wedge y(y+2) \neq 0.$

$x = \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{3}y$ substitueren in K geeft

$9(\frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{3}y)^2 - 3y^2 = y^3$

$9(\frac{1}{36}y^4 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{9}y^2) - 3y^2 = y^3$

$\frac{1}{4}y^4 + y^3 + y^2 - 3y^2 = y^3$

$\frac{1}{4}y^4 - 2y^2 = 0$

$y^4 - 8y^2 = 0$

$y^2(y^2 - 8) = 0$

$y^2 = 0 \vee y^2 = 8$

$y^2 = 0 \vee y^2 = 8$

$y = 0$ (voldoet niet) $\vee$ $y = \pm\sqrt{8}$.

$y = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ geeft $x = \frac{1}{6}(-\sqrt{8})^2 + \frac{1}{3} \cdot -2\sqrt{2} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$

en $y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ geeft $x = \frac{1}{6}(\sqrt{8})^2 + \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Dus de punten zijn $(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$ en $(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

39a $y = px$ substitueren in K geeft $x^4 - 4x^2 + 4(px)^2 = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4p^2x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 4 + 4p^2) = 0$

$x^2 = 0 \vee x^2 - 4 + 4p^2 = 0$

$x = 0 \vee x^2 = 4 - 4p^2$.

Drie punten gemeenschapppelijk $\Rightarrow$ drie verschillende oplossingen $\Rightarrow 4 - 4p^2 > 0$.

$4 - 4p^2 > 0 \Rightarrow -4p^2 > -4 \Rightarrow p^2 < 1 \Rightarrow -1 < p < 1$.

Dus voor $-1 < p < 1$ heeft de lijn $y = px$ drie verschillende punten met K gemeenschappelijk.

39b $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow p = \frac{1}{2}$. (het eerste kwadrant is dat deel van het assenstelsel met $x > 0$ én $y > 0$)

Uit 39 a volgt dan $x = 0$ (niet in I) $\vee$ $x^2 = 4 - 4 \cdot (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$ (niet in I) $\vee$ $x = \sqrt{3}$ (in I).

$x = \sqrt{3}$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$. Dus het snijpunt in het eerste kwadrant is $(\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0 \Rightarrow 4x^3dx - 8xdx + 8ydy = 0 \Rightarrow 8ydy = (-4x^3 + 8x)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3+8x}{8y} = \frac{-x^3+2x}{2y}$.

Stel k: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{3}^3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}^2 + 2 = -3 + 2 = -1$.

k: $y = -x + b$ door $(\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}) \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{3} + b \Rightarrow 1\frac{1}{2}\sqrt{3} = b$. Dus k: $y = -x + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

39c // x-as: $-x^3 + 2x = 0 \wedge 2y \neq 0 \Rightarrow x(-x^2 + 2) = 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow \left(x = 0 \vee x^2 = 2\right) \wedge y \neq 0 \Rightarrow \left(x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}\right) \wedge y \neq 0.$

$x = 0$ geeft $0 - 0 + 4y^2 = 0$ (voldoet niet want $y = 0$).

$x = \sqrt{2}$ geeft $4 - 4 \cdot 2 + 4y^2 = 0 \Rightarrow 4y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ (voldoen want $y \neq 0$).

$x = -\sqrt{2}$ geeft $4 - 4 \cdot 2 + 4y^2 = 0 \Rightarrow 4y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ (voldoen want $y \neq 0$).

Dus in de punten $(\sqrt{2},\ -1)$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2},\ -1)$ en $(-\sqrt{2}, 1)$ is raaklijn evenwijdig aan de x-as.

// y-as: $2y = 0 \wedge -x^3 + 2x \neq 0 \Rightarrow y = 0 \wedge x(-x^2 + 2) \neq 0 \Rightarrow y = 0 \wedge \left(x \neq 0 \wedge x^2 \neq 2\right) \Rightarrow y = 0 \wedge \left(x \neq 0 \wedge x \neq \pm\sqrt{2}\right)$.

$y = 0$ geeft $x^4 - 4x^2 + 0 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = 4 \Rightarrow x = 0$ (voldoet niet want $x = 0$) $\vee$ $x = -2$ (voldoet) $\vee$ $x = 2$ (voldoet).

Dus in de punten $(-2, 0)$ en $(2, 0)$ is raaklijn evenwijdig aan de y-as.

39d Stel de lijn $y = x + q$ raakt K.

Voor de raakpunten geldt: $x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0 \wedge y = x + q \wedge \frac{dy}{dx} = 1$.

$\frac{dy}{dx} = 1$ geeft $\frac{-x^3+2x}{2y} = 1 \Rightarrow -x^3 + 2x = 2y \wedge y \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^3 + x \wedge y \neq 0$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x^3 + x$ in K geeft

$x^4 - 4x^2 + 4(-\frac{1}{2}x^3 + x)^2 = 0$

$x^4 - 4x^2 + 4(\frac{1}{4}x^6 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^3 \cdot x + x^2) = 0$

$x^4 - 4x^2 + x^6 - 4x^4 + 4x^2 = 0$

$x^6 - 3x^4 = 0$

$x^4(x^2 - 3) = 0$

$x^4 = 0 \vee x^2 = 3$

$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$.

$x = 0$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 0^3 + 0 = 0$ (voldoet niet want $y = 0$)

$x = -\sqrt{3}$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{3})^3 + -\sqrt{3} = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot -\sqrt{3} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (voldoet)

en $x = \sqrt{3}$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}^3 + \sqrt{3} = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (voldoet).

De raaklijn in $(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ is $y - \frac{1}{2}\sqrt{3} = x + \sqrt{3}$ ofwel $y = x + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

De raaklijn in $(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ is $y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = x - \sqrt{3}$ ofwel $y = x - 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Uit een plot (fig. 14.28) en de berekening hierboven volgt dan:

voor $q < -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \vee q > 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ heeft $y = x + q$ geen snijpunten met K.

40a Manier I: met halfsubstitutie van $A(5, 9)$ in de vergelijking van de parabool $y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$ geeft
$5y - x - 9 - y - 5 + 3 = 0$ ofwel $-x + 4y - 11 = 0$ ofwel $x - 4y + 11 = 0$.
Manier II: $y^2 - 2x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow 2y\mathrm{d}y - 2\mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow (2y-2)\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{2y-2} = \frac{1}{y-1}$.
l: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{A(9,5)} = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow l$: $y = \frac{1}{4}x + b$ door $A(5, 9) \Rightarrow 5 = \frac{1}{4} \cdot 9 + b \Rightarrow b = 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$.
Dus l: $y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$ ofwel $4y = x + 11$ ofwel $x - 4y + 11 = 0$.

40b Met halfsubstitutie van $B(8, 4)$ in de vergelijking van de ellips $3x^2 + 5y^2 - 18x - 20y - 48 = 0$ geeft
$3 \cdot x \cdot 8 + 5 \cdot y \cdot 4 - 9x - 9 \cdot 8 - 10y - 10 \cdot 4 - 48 = 0$ ofwel $15x + 10y - 160 = 0$ ofwel $3x + 2y - 32 = 0$.
Manier II: $3x^2 + 5y^2 - 18x - 20y - 48 = 0 \Rightarrow 6x\mathrm{d}x + 10y\mathrm{d}y - 18\mathrm{d}x - 20\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{18-6x}{10y-20} = \frac{9-3x}{5y-10}$.
m: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{B(8,4)} = \frac{9-24}{20-10} = \frac{-15}{10} \Rightarrow m$: $y = -1\frac{1}{2}x + b$ door $B(8, 4) \Rightarrow 4 = -1\frac{1}{2} \cdot 8 + b \Rightarrow b = 16$.
Dus $y = -1\frac{1}{2}x + 16$ ofwel $2y = -3x + 32$ ofwel $3x + 2y - 32 = 0$.

40c Met halfsubstitutie van $C(10, 5)$ in de vergelijking van de hyperbool $3x^2 - 5y^2 - 12x + 30y - 205 = 0$ geeft
$3 \cdot x \cdot 10 - 5 \cdot y \cdot 5 - 6x - 6 \cdot 10 + 15y + 15 \cdot 5 - 205 = 0$ ofwel $24x - 10y - 190 = 0$ ofwel $12x - 5y - 95 = 0$.
Manier II: $3x^2 - 5y^2 - 12x + 30y - 205 = 0 \Rightarrow 6x\mathrm{d}x - 10y\mathrm{d}y - 12\mathrm{d}x + 30\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12-6x}{-10y+30} = \frac{6-3x}{-5y+15}$.
n: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{C(10,5)} = \frac{6-30}{-25+15} = \frac{-24}{-10} = 2{,}4 \Rightarrow n$: $y = 2{,}4x + b$ door $C(10, 5) \Rightarrow 5 = 2{,}4 \cdot 10 + b \Rightarrow b = -19$.
Dus $y = 2{,}4x - 19$ ofwel $10y = 24x - 190$ ofwel $5y = 12x - 95$ ofwel $12x - 5y - 95 = 0$.

41 $A(3, 0, 0) \Rightarrow 20 \cdot 3 + 0 + 0 = 60$ klopt; $B(0, 4, 0) \Rightarrow 0 + 15 \cdot 4 + 0 = 60$ klopt en $C(0, 0, 5) \Rightarrow 0 + 0 + 12 \cdot 5 = 60$ klopt.

42a $$\begin{cases} 15x + 20y + 12z = 60 \\ y + 2z = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 20y = 60 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 80 = 60 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x = -20 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(-\tfrac{4}{3}, 4, 0).$$

42b $$\begin{cases} 15x + 20y + 12z = 60 \\ y + 2z = 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20y + 12z = 60 \\ y + 2z = 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y + 3z = 15 \\ 5y + 10z = 20 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7z = -5 \\ y + 2z = 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{5}{7} \\ y + 2 \cdot \frac{5}{7} = 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow R(0, \tfrac{18}{7}, \tfrac{5}{7}).$$

43a V: $2x + 3y + 4z = 12$ ofwel V: $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$ gaat door $(6, 0, 0)$ $(0, 4, 0)$ en $(0, 0, 3)$.
W: $5x + 4z = 20$ ofwel W: $\frac{x}{4} + \frac{z}{5} = 1$ // y-as en gaat door $(4, 0, 0)$ en $(0, 0, 5)$.
Teken zelf V en W in één figuur.

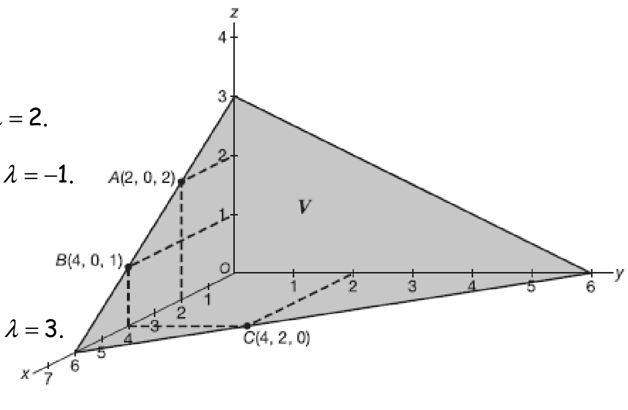
43b $$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12 \\ 5x + 4z = 20 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x = 20 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 3y = 12 \\ x = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 4 \\ x = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P(4, \tfrac{4}{3}, 0).$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12 \\ 5x + 4z = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4z = 12 \\ 5x + 4z = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = -8 \\ 5x + 4z = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ \frac{40}{3} + 4z = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ 4z = \frac{20}{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(\tfrac{8}{3}, 0, \tfrac{5}{3}).$$

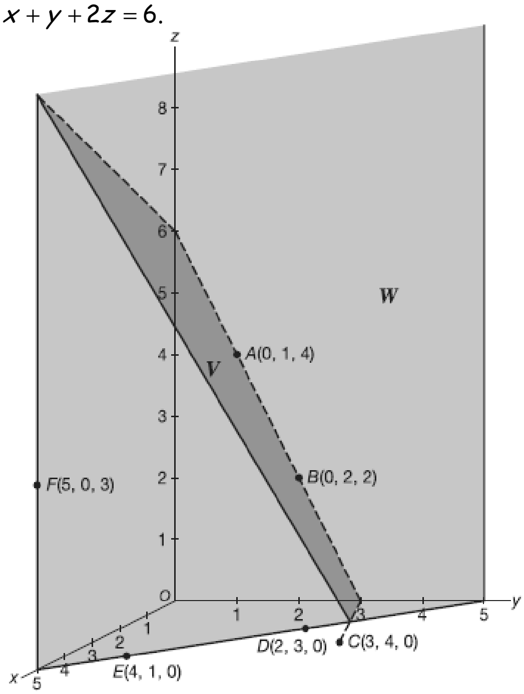
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12 \\ 5x + 4z = 20 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 4z = 12 \\ 4z = 20 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 4z = 12 \\ z = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 20 = 12 \\ z = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -8 \\ z = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow R(0, -\tfrac{8}{3}, 5).$$

44a Zie V in de figuur hiernaast.

44b $A(2, 0, 2)$ en $B(4, 0, 1)$ liggen in het Oxz-vlak.
AB: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-0 \\ 1-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
AB snijden met de x-as ($y = 0 \wedge z = 0$) geeft: $z = 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.
$\lambda = 2$ geeft het punt op de x-as: $(x, y, z) = (6, 0, 0)$.
AB snijden met de z-as ($x = 0 \wedge y = 0$) geeft: $x = 2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.
$\lambda = -1$ geeft het punt op de z-as: $(x, y, z) = (0, 0, 3)$.
$D(6, 0, 0)$ en $C(4, 2, 0)$ liggen in het Oxy-vlak.
DC: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4-6 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
DC snijden met de y-as ($x = 0 \wedge z = 0$) geeft: $x = 6 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$.
$\lambda = 3$ geeft het punt op de y-as: $(x, y, z) = (0, 6, 0)$.



44c V gaat door $(6, 0, 0)$ $(0, 6, 0)$ en $(0, 0, 3) \Rightarrow V\colon \frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1$ ofwel $V\colon x+y+2z=6$.



45ab $A(0, 1, 4)$ en $B(0, 2, 2)$ liggen in het Oyz-vlak.

$AB\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0-0\\2-1\\2-4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

AB snijden met de y-as $(x=0 \wedge z=0)$ geeft: $z=4-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$.
$\lambda=2$ geeft het punt op de y-as: $(x, y, z)=(0, 3, 0)$.
AB snijden met de z-as $(x=0 \wedge y=0)$ geeft: $y=1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1$.
$\lambda=-1$ geeft het punt op de z-as: $(x, y, z)=(0, 0, 6)$.

$V\colon \frac{x}{a}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$ door $C(3, 4, 0) \Rightarrow \frac{3}{a}+\frac{4}{3}=1 \Rightarrow \frac{3}{a}=-\frac{1}{3} \Rightarrow a=-9$.

Dus $V\colon \frac{x}{-9}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$ (zie hiernaast) ofwel $-2x+6y+3z=18$.

$D(2, 3, 0)$ en $E(4, 1, 0)$ liggen in het Oxy-vlak.

$DE\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4-2\\1-3\\0-0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$.

DE snijden met de x-as $(y=0 \wedge z=0)$ geeft: $y=3-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1{,}5$.
$\lambda=1{,}5$ geeft het punt op de x-as: $(x, y, z)=(5, 0, 0)$.
DE snijden met de y-as $(x=0 \wedge z=0)$ geeft: $x=2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1$.
$\lambda=-1$ geeft het punt op de y-as: $(x, y, z)=(0, 5, 0)$.

$W\colon \frac{x}{5}+\frac{y}{5}+\frac{z}{a}=1$ door $F(5, 0, 3) \Rightarrow \frac{5}{5}+\frac{0}{5}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow 1+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow \frac{z}{c}=0$.

Dus $W\colon \frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$ (zie hiernaast) ofwel $W\colon x+y=5$ (dus W // z-as).

45c $\begin{cases}-2x+6y+3z=18\\x+y=5\\z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x+6y=18\\2x+2y=10\\z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8y=28\\x+y=5\\z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}\\x+\frac{7}{2}=5\\z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\frac{7}{2}\\x=\frac{3}{2}\\z=0\end{cases} \Rightarrow P(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 0)$.

$\begin{cases}-2x+6y+3z=18\\x+y=5\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x+3z=18\\x=5\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-10+3z=18\\x=5\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3z=28\\x=5\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=\frac{28}{3}\\x=5\\y=0\end{cases} \Rightarrow Q(5, 0, \frac{28}{3})$.

$\begin{cases}-2x+6y+3z=18\\x+y=5\\x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6y+3z=18\\y=5\\x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}30+3z=18\\y=5\\x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3z=-12\\y=5\\x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=-4\\y=5\\x=0\end{cases} \Rightarrow R(0, 5, -4)$.

46 $\begin{cases}3x+8z=24\\2x+3y=12\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+8z=24\\2x=12\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+8z=24\\x=6\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}18+8z=24\\x=6\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8z=6\\x=6\\y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=\frac{3}{4}\\x=6\\y=0\end{cases} \Rightarrow P(6, 0, \frac{3}{4})$.

$\begin{cases}3x+8z=24\\2x+3y=12\\x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8z=24\\3y=12\\x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=3\\y=4\\x=0\end{cases} \Rightarrow Q(0, 4, 3)$.

$A(0, 2, 5)$ en $Q(0, 4, 3)$ liggen in het Oyz-vlak.

$AQ\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0-0\\4-2\\3-5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$.

AQ snijden met de y-as $(x=0 \wedge z=0)$ geeft: $z=5-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2{,}5$.
$\lambda=2{,}5$ geeft het punt op de y-as: $(x, y, z)=(0, 7, 0)$.
AQ snijden met de z-as $(x=0 \wedge y=0)$ geeft: $y=2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1$.
$\lambda=-1$ geeft het punt op de z-as: $(x, y, z)=(0, 0, 7)$.

$U\colon \frac{x}{a}+\frac{y}{7}+\frac{z}{7}=1$ door $P(6, 0, \frac{3}{4}) \Rightarrow \frac{6}{a}+0+\frac{\frac{3}{4}}{7}=1 \Rightarrow \frac{6}{a}+\frac{3}{28}=1 \Rightarrow \frac{6}{a}=\frac{25}{28} \Rightarrow 25a=168 \Rightarrow a=\frac{168}{25}$.

Dus $U\colon \frac{x}{\frac{168}{25}}+\frac{y}{7}+\frac{z}{7}=1$ ofwel $U\colon \frac{25x}{168}+\frac{y}{7}+\frac{z}{7}=1$ ofwel $U\colon 25x+24y+24z=168$.

47a Van A naar B is $x_B-x_A=5-4=1$ in de x-richting.
$y_B-y_A=6-2=4$ in de y-richting.
$z_B-z_A=7-1=6$ in de z-richting.

47b $AB\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$. $C(6, 10, 13)$ ligt op AB want $\lambda=2$ geeft $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\\13\end{pmatrix}$.

47c $D(3, p, q)$ ligt op $AB \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\p\\q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3=4+\lambda\\p=2+4\lambda\\q=1+6\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1=\lambda\\p=2-4=-2\\q=1-6=-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=-2\\q=-5\end{cases}$.

47d $E(7, 14, 20)$ ligt op $AB \Rightarrow \begin{pmatrix}7\\14\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}7=4+\lambda\\14=2+4\lambda\\20=1+6\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3=\lambda\\14=2+12\\20=1+18 \text{ klopt niet}\end{cases}$. Dus E ligt niet op AB.

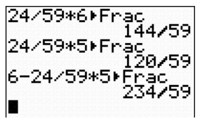
48a l: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8-2\\3-1\\6--4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\2\\10\end{pmatrix}$ of $(x, y, z) = (2, 1, -4) + \lambda(6, 2, 10)$.

48b Substitutie in V geeft $2\cdot(2+6\lambda) - 3\cdot(1+2\lambda) + 5\cdot(-4+10\lambda) = 9$
$4 + 12\lambda - 3 - 6\lambda - 20 + 50\lambda = 9$
$56\lambda = 28$
$\lambda = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$. $\lambda = \frac{1}{2}$ geeft $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\2\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$. Dus $P(5, 2, 1)$.

49a Vlak $ABED$ snijdt de x-as in $A(6, 0, 0)$, de y-as in $B(0, 4, 0)$ en loopt evenwijdig met de z-as.
Dus $ABED$: $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ ofwel $2x + 3y = 12$.
CF: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6-0\\6-0\\0-5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\6\\-5\end{pmatrix}$.

49b CF snijden met $ABED$ geeft $2\cdot 6\lambda + 3\cdot 6\lambda = 12$
$5\cdot 6\lambda = 12$
$5\cdot\lambda = 2$
$\lambda = \frac{2}{5}$. $\lambda = \frac{2}{5}$ geeft $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}6\\6\\-5\end{pmatrix}$. Dus $S(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}, 3)$.

50 Vlak CDE door $C(0, 0, 5)$ en evenwijdig met het Oxy-vlak $\Rightarrow CDE$: $z = 5$.
FG: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6-0\\5-0\\0-6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\5\\-6\end{pmatrix}$.
FG snijden met $CDE \Rightarrow 6 - 6\lambda = 5 \Rightarrow -6\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$. $\lambda = \frac{1}{6}$ geeft $P(1, \frac{5}{6}, 5)$.
Vlak $ABED$ snijdt de x-as in $A(8, 0, 0)$, de y-as in $B(0, 6, 0)$ en gaat door $D(4, 0, 5)$.
$ABED$: $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} + \frac{z}{c} = 1$ door $D(4, 0, 5) \Rightarrow \frac{4}{8} + 0 + \frac{5}{c} = 1 \Rightarrow \frac{5}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 10$.
Dus $ABED$: $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} + \frac{z}{10} = 1$ ofwel $15x + 20y + 12z = 120$.
FG snijdt $ABED \Rightarrow 15\cdot 6\lambda + 20\cdot 5\lambda + 12\cdot(6 - 6\lambda) = 120 \Rightarrow 90\lambda + 100\lambda + 72 - 72\lambda = 120 \Rightarrow 118\lambda = 48 \Rightarrow \lambda = \frac{48}{118} = \frac{24}{59}$.
$\lambda = \frac{24}{59}$ geeft $Q(\frac{24}{59}\cdot 6, \frac{24}{59}\cdot 5, 6 - \frac{24}{59}\cdot 5) = Q(\frac{144}{59}, \frac{120}{59}, \frac{234}{59})$.



51a $d(O, (4, 3, 0)) = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$. Dus $(4, 3, 0)$ ligt op de bol.

51b $d(O, (2, 3, 3)) = \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22} < 5$. Dus $(2, 3, 3)$ ligt binnen de bol.

51c Stel $P(-3, 2, p)$ met $p > 0$.
$\left.\begin{array}{l}\text{Gegeven: } P \text{ ligt op de bol} \Rightarrow d(O, P) = 5\\ d(O, P) = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + p^2} = \sqrt{13 + p^2}\end{array}\right\} \Rightarrow 13 + p^2 = 25 \Rightarrow p^2 = 12 \Rightarrow p = -\sqrt{12}$ (vold. niet) $\vee\ p = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (vold.).

52 $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$ snijden met het Oxz-vlak ($y = 0$) geeft
$(x-2)^2 + (-3)^2 + (z-1)^2 = 25$
$(x-2)^2 + (z-1)^2 = 16$. Dus een cirkel met straal $\sqrt{16} = 4$ en middelpunt $(2, 0, 1)$.

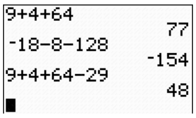
53a $O(0, 0, 0)$ substitueren in $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 29$ geeft
$3^2 + (-2)^2 + 4^2 = 29 \Rightarrow 9 + 4 + 16 = 29$ KLOPT! Dus de bol gaat door de oorsprong.

53b $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 29$ snijden met het Oxy-vlak ($z = 0$) geeft
$(x+3)^2 + (y-2)^2 + 4^2 = 29$
$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$. Dit is een cirkel met straal $\sqrt{13}$ en middelpunt $(3, -2, 0)$.

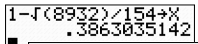
53c Het middelpunt van de bol is $M(-3, 2, -4)$.
l: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3-0\\2-0\\-4-4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\2\\-8\end{pmatrix}$.

l snijden met de bol geeft $(-3\lambda+3)^2+(2\lambda-2)^2+(4-8\lambda+4)^2=29$

$$(-3\lambda+3)^2+(2\lambda-2)^2+(8-8\lambda)^2=29$$
$$9\lambda^2+2\cdot-3\lambda\cdot3+9+4\lambda^2+2\cdot2\lambda\cdot-2+4+64+2\cdot8\cdot-8\lambda+64\lambda^2=29$$

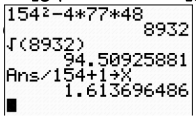


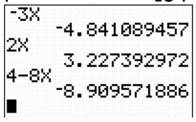
$$9\lambda^2-18\lambda+9+4\lambda^2-8\lambda+4+64-128\lambda+64\lambda^2=29$$
$$77\lambda^2-154\lambda+48=0 \text{ met } D=(-154)^2-4\cdot77\cdot48=8932$$
$$\lambda=\frac{154+\sqrt{8932}}{2\cdot77}=\frac{154+\sqrt{8932}}{154}=1+\frac{\sqrt{8932}}{154} \vee \lambda=1-\frac{\sqrt{8932}}{154}.$$

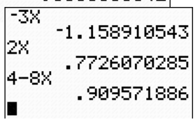


$\lambda=1+\frac{\sqrt{8932}}{154}$ geeft $(-4{,}841;\ 3{,}227;\ -8{,}910)$

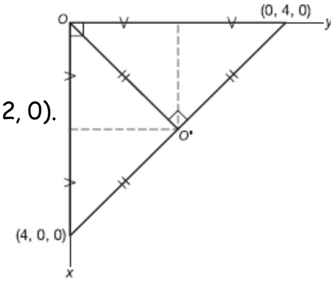
$\lambda=1-\frac{\sqrt{8932}}{154}$ geeft $(-1{,}159;\ 0{,}773;\ 0{,}910)$.

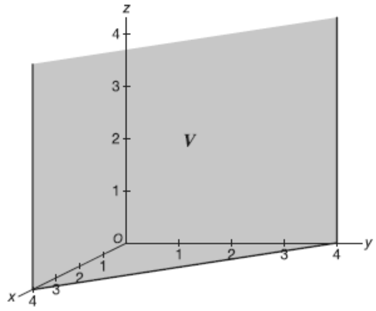




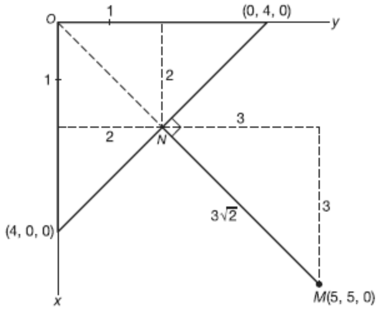


54a V: $x+y=4$ ofwel $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ gaat door (4, 0, 0) en (0, 4, 0) en // z-as.
Het middelpunt O van b_1 projecteren op vlak V geeft de situatie hieronder.
Hieruit volgt $O'(2, 2, 0)$ en $OO'=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$.
In $\Delta OPO'$, met P op c_1, is $OO'=\sqrt{5^2-\sqrt{8}^2}=\sqrt{17}$.
Dus de straal van c_1 is $\sqrt{17}$ en het middelpunt $O'(2, 2, 0)$.

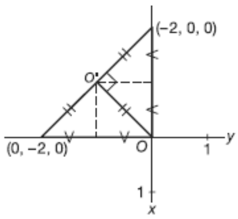




54b b_2: $x^2+y^2+z^2-10x-10y-45=0$
$$x^2-10x+y^2-10y+z^2-45=0$$
$$(x-5)^2-25+(y-5)^2-25+z^2-45=0$$
$$(x-5)^2+(y-5)^2+z^2=95.$$
De projectie van $M(5, 5, 0)$ op V geeft de situatie hiernaast $\Rightarrow MN=3\sqrt{2}$.
In ΔMNP, met P op c_2, is $PN=\sqrt{\sqrt{95}^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{95-18}=\sqrt{77}$.
Dus de straal van c_2 is $\sqrt{77}$ en het middelpunt is $N(2, 2, 0)$.

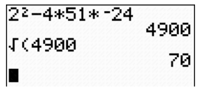


54c b_1 snijden met b_2 geeft
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 25 \\ x^2+y^2+z^2-10x-10y = 45 \end{cases} -$$
$$10x+10y=-20 \Rightarrow b_1 \text{ en } b_2 \text{ snijden elkaar in het vlak } x+y=-2.$$
De projectie van O op $x+y=-2$ geeft de situatie hiernaast.
Hieruit volgt $O'(-1,\ -1, 0)$ en $OO'=\sqrt{(-1)^2-(-1)^2}=\sqrt{2}$.
In $\Delta OPO'$, met P op c_3, is $PO'=\sqrt{5^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{25-2}=\sqrt{23}$.
Dus de straal van c_3 is $\sqrt{23}$ en het middelpunt is $O'(-1,\ -1, 0)$.

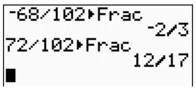


54d l: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5-0\\5-0\\0-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\5\\-1\end{pmatrix}$.

l snijden met b_1 geeft: $(5\lambda)^2+(5\lambda)^2+(1-\lambda)^2=25$
$$25\lambda^2+25\lambda^2+1-2\lambda+\lambda^2=25$$
$$51\lambda^2-2\lambda-24=0 \text{ met } D=(-2)^2-4\cdot51\cdot-24=4900 \Rightarrow \sqrt{D}=70$$



$$\lambda=\frac{2-70}{2\cdot51}=\frac{-68}{102}=-\frac{2}{3} \vee \lambda=\frac{2+70}{2\cdot51}=\frac{72}{102}=\frac{12}{17}.$$

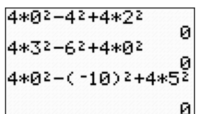


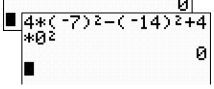
$\lambda=-\frac{2}{3}$ geeft $(-\frac{2}{3}\cdot5,\ -\frac{2}{3}\cdot5, 1--\frac{2}{3})=(-\frac{10}{3},\ -\frac{10}{3},\ \frac{5}{3})$ en

$\lambda=-\frac{2}{3}$ geeft $(\frac{12}{17}\cdot5,\ \frac{12}{17}\cdot5, 1-\frac{12}{17})=(\frac{60}{17},\ \frac{60}{17},\ \frac{5}{17})$.

55a $\lambda=2$ geeft het punt (0, 4, 2) $\Rightarrow A(0, 4, 2)$ ligt op het kegelvlak.
Wentel je l om de y-as zodat deze in het Oxy-vlak komt te liggen dan krijg je
$(x, y, z)=\lambda(1, 2, 0)$ en geeft $\lambda=3$ het punt (3, 6, 0) en geeft $\lambda=-7$ het punt $(-7,\ -14, 0)$.
Dus $B(3, 6, 0)$ en $D(-7,\ -14, 0)$ liggen op het kegelvlak.
Wentel je l over 180° om de y-as dan krijg je $(x, y, z)=\lambda(0, 2,\ -1)$ en
geeft $\lambda=-5$ het punt $(0,\ -10, 5) \Rightarrow C(0,\ -10, 5)$ ligt op het kegelvlak.

55b $A(0, 4, 2)$ controleren geeft $4\cdot0^2-4^2+4\cdot2^2=0$ klopt.
$B(3, 6, 0)$ controleren geeft $4\cdot3^2-6^2+4\cdot0^2=0$ klopt.
$C(0,\ -10, 5)$ controleren geeft $4\cdot0^2-(-10)^2+4\cdot5^2=0$ klopt.
$D(-7,\ -14, 0)$ controleren geeft $4\cdot(-7)^2-(-14)^2+4\cdot0^2=0$ klopt.
Dus A, B, C en D voldoen aan de vergelijking $4x^2-y^2+4z^2=0$.





56a De doorsnede van het vlak $y = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is de cirkel met middelpunt $M(0, \lambda, 0)$ en straal $r = 2\lambda$.
Voor een punt $P(x, \lambda, z)$ op deze cirkel geldt dus $y = \lambda \wedge x^2 + z^2 = 4\lambda^2$ en hieruit volgt $x^2 + z^2 = 4y^2$ ofwel $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$ (als een vergelijking van het kegeloppervlak).

56b De doorsnede van het vlak $z = 2\lambda$ en het omwentelingsoppervlak is de cirkel met middelpunt $M(0, 0, 2\lambda)$ en straal $r = \lambda$.
Voor een punt $P(x, y, 2\lambda)$ op deze cirkel geldt dus $z = 2\lambda \wedge x^2 + y^2 = \lambda^2 \Rightarrow z^2 = 4\lambda^2 \wedge 4x^2 + 4y^2 = 4\lambda^2$ en hieruit volgt $4x^2 + 4y^2 = z^2$ ofwel $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ (als een vergelijking van het kegeloppervlak).

57a $A(0, \lambda, \frac{1}{2}\lambda^2)$ is een punt op de parabool $x = 0 \wedge z = \frac{1}{2}y^2$.
Voor een punt $P(x, y, \frac{1}{2}\lambda^2)$ op de cirkel met middelpunt $M(0, 0, \frac{1}{2}\lambda^2)$ en straal $r = \lambda$ in het vlak $z = \frac{1}{2}\lambda^2$ geldt: $z = \frac{1}{2}\lambda^2 \wedge x^2 + y^2 = \lambda^2 \Rightarrow 2z = \lambda^2 \wedge x^2 + y^2 = \lambda^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2z$ ofwel $x^2 + y^2 - 2z = 0$.

57b $A(0, 2\lambda^2, \lambda)$ is een punt op de parabool $x = 0 \wedge y = 2z^2$.
Voor een punt $P(x, 2\lambda^2, z)$ op de cirkel met middelpunt $M(0, 2\lambda^2, 0)$ en straal $r = \lambda$ in het vlak $y = 2\lambda^2$ geldt: $y = 2\lambda^2 \wedge x^2 + z^2 = \lambda^2 \Rightarrow y = 2\lambda^2 \wedge 2x^2 + 2z^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow 2x^2 + 2z^2 = y$ ofwel $2x^2 - y + 2z^2 = 0$.

58a $y = \lambda$ en $y^2 + 4z^2 = 16$ geeft $\lambda^2 + 4z^2 = 16 \Rightarrow 4z^2 = 16 - \lambda^2 \Rightarrow z^2 = 4 - \frac{1}{4}\lambda^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{4 - \frac{1}{4}\lambda^2}$.
De doorsnede van het vlak $y = \lambda$ met het omwentelingsoppervlak is de cirkel met $M(0, \lambda, 0)$ en $r = \sqrt{4 - \frac{1}{4}\lambda^2}$.
Voor deze cirkel die in het vlak $y = \lambda$ ligt, geldt $x^2 + z^2 = r^2$, dus $x^2 + z^2 = 4 - \frac{1}{4}\lambda^2$.

58b Voor een punt $P(x, \lambda, z)$ op deze cirkel geldt $y = \lambda \wedge x^2 + z^2 = 4 - \frac{1}{4}\lambda^2$.
Dit geeft $x^2 + z^2 = 4 - \frac{1}{4}y^2$ ofwel $4x^2 + 4z^2 = 16 - y^2$.
Dus een vergelijking van de ellipsoïde is $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

58c $z = \lambda$ en $y^2 + 4z^2 = 16$ geeft $y^2 + 4\lambda^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 16 - 4\lambda^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{16 - 4\lambda^2}$.
De doorsnede van het vlak $z = \lambda$ met het omwentelingsoppervlak is de cirkel met $M(0, 0, \lambda)$ en $r = \sqrt{16 - 4\lambda^2}$.
Voor een punt $P(x, y, \lambda)$ op deze cirkel geldt $z = \lambda \wedge x^2 + y^2 = 16 - 4\lambda^2$.
Dit geeft als vergelijking $x^2 + y^2 = 16 - 4z^2$ ofwel $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

59a $z = \lambda$ en $y^2 - 4z^2 = 4$ geeft $y^2 - 4\lambda^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - 4\lambda^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - 4\lambda^2}$.
De doorsnede van het vlak $z = \lambda$ met het omwentelingsoppervlak is de cirkel met $M(0, 0, \lambda)$ en $r = \sqrt{4 - 4\lambda^2}$.
Voor een punt $P(x, y, \lambda)$ op deze cirkel geldt $z = \lambda \wedge x^2 + y^2 = 4 - 4\lambda^2$.
Dit geeft als vergelijking $x^2 + y^2 = 4 - 4z^2$ ofwel $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

59b $y = \lambda$ en $y^2 - 4z^2 = 4$ geeft $\lambda^2 - 4z^2 = 4 \Rightarrow -4z^2 = 4 - \lambda^2 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 - 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - 1}$.
De doorsnede van het vlak $z = \lambda$ met het omwentelingsoppervlak is de cirkel met $M(0, \lambda, 0)$ en $r = \sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - 1}$.
Voor een punt $P(x, \lambda, z)$ op deze cirkel geldt $y = \lambda \wedge x^2 + z^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 - 1$.
Dit geeft als vergelijking $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}y^2 - 1$ ofwel $4x^2 + 4z^2 = y^2 - 4$ ofwel $4x^2 - y^2 + 4z^2 = -4$.

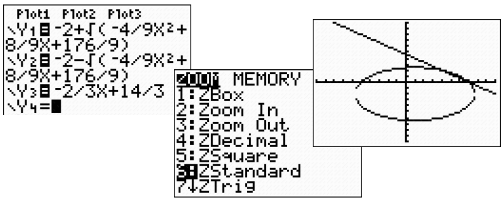
Diagnostische toets

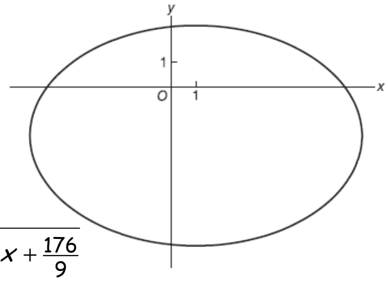
D1a $(1 + a,\ -2 + b)$ op K geeft
$4(1+a)^2 + 9(-2+b)^2 - 8(1+a) + 36(-2+b) - 140 = 0$
$4(1+2a+a^2) + 9(4-4b+b^2) - 8 - 8a - 72 + 36b - 140 = 0$
$4 + 8a + 4a^2 + 36 - 36b + 9b^2 - 8 - 8a - 72 + 36b - 140 = 0$
$4a^2 + 9b^2 - 180 = 0 \ldots$**(1)**

$(1 - a,\ -2 - b)$ op K geeft
$4(1-a)^2 + 9(-2-b)^2 - 8(1-a) + 36(-2-b) - 140 = 0$
$4(1-2a+a^2) + 9(4+4b+b^2) - 8 + 8a - 72 - 36b - 140 = 0$
$4 - 8a + 4a^2 + 36 + 36b + 9b^2 - 8 + 8a - 72 - 36b - 140 = 0$
$4a^2 + 9b^2 - 180 = 0 \ldots$**(2)**

Uit **(1)** en **(2)** volgt $(1 + a,\ -2 + b)$ op $K \Leftrightarrow (1 - a,\ -2 - b)$ op K, dus K is symmetrisch in het punt $(1,\ -2)$.

D1b
$4x^2+9y^2-8x+36y-140=0$
$9y^2+36y=-4x^2+8x+140$
$y^2+4y=-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{140}{9}$
$(y+2)^2-4=-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{140}{9}$
$(y+2)^2=-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{176}{9}$

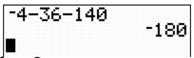




$y+2=\pm\sqrt{-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{176}{9}} \Rightarrow y=-2+\sqrt{-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{176}{9}} \vee y=-2-\sqrt{-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{176}{9}}$

Voer in $y_1=-2+\sqrt{-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{176}{9}}$ en $y_2=-2-\sqrt{-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{176}{9}}$. Zie een schets van de ellips K hierboven.

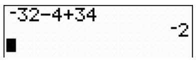
D1c
$4x^2+9y^2-8x+36y-140=0$
$4x^2-8x+9y^2+36y-140=0$
$4(x^2-2x)+9(y^2+4y)-140=0$
$4((x-1)^2-1)+9((y+2)^2-4)-140=0$
$4(x-1)^2-4+9(y+2)^2-36-140=0$
$4(x-1)^2+9(y+2)^2=180$



$\frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y+2)^2}{20}=1$
($a^2=45>b^2=20 \Rightarrow$ brandpunten op de horizontale symm. as en $c^2=a^2-b^2=45-20=25$)
K is een ellips met middelpunt $(1,\,-2)$ en toppen $(1+3\sqrt{5},\,-2)$, $(1-3\sqrt{5},\,-2)$, $(1,\,-2+2\sqrt{5})$ en $(1,\,-2-2\sqrt{5})$.
Brandpunten zijn $F_1(1+5,\,-2)=F_1(6,\,-2)$ en $F_2(1-5,\,-2)=F_2(-4,\,-2)$.

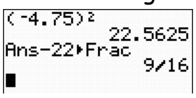
D1d
$2x+3y=14$ ofwel $2x=14-3y$
substitueren in $4x^2+9y^2-8x+36y-140=0$ ofwel $(2x)^2+9y^2-4\cdot 2x+36y-140=0$ geeft
$(14-3y)^2+9y^2-4\cdot(14-3y)+36y-140=0$
$196-84y+9y^2+9y^2-56+12y+36y-140=0 \Rightarrow 18y^2-36y=0 \Rightarrow 18y(y-2)=0 \Rightarrow y=0 \vee y=2.$
$\begin{cases} y=0 \\ x=7 \end{cases} \vee \begin{cases} y=2 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow A(4,\,2)$ en $B(7,\,0)$. Dus de lengte van AB is $d(A,\,B)=\sqrt{(0-2)^2+(7-4)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}.$

D2
Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $2 \Rightarrow$ vervang x door $\frac{1}{2}x$.
L: $2(\frac{1}{2}x)^2+y^2-16\cdot\frac{1}{2}x+4y+34=0$
$2\cdot\frac{1}{4}x^2+y^2-8x+4y+34=0$
$\frac{1}{2}x^2-8x+y^2+4y+34=0$
$\frac{1}{2}(x^2-16x)+y^2+4y+34=0$
$\frac{1}{2}\left((x-8)^2-64\right)+(y+2)^2-4+34=0$
$\frac{1}{2}(x-8)^2-32+(y+2)^2-4+34=0$

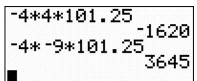


$\frac{1}{2}(x-8)^2+(y+2)^2=2$ ofwel $\frac{(x-8)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{2}=1.$
L is een ellips met middelpunt $(8,\,-2)$.
$a^2=4$ en $b^2=2 \Rightarrow a^2>b^2$ en $c^2=a^2-b^2=4-2=2.$
De toppen zijn $(8-2,\,-2)=(6,\,-2)$, $(8+2,\,-2)=(10,\,-2)$, $(8,\,-2+\sqrt{2})$ en $(8,\,-2-\sqrt{2})$.
De brandpunten zijn $(8-\sqrt{2},\,-2)$ en $(8+\sqrt{2},\,-2)$.

D3
De lijn door $A(-4\frac{3}{4},\,2)$ stellen we l: $x=-4\frac{3}{4}+\lambda \wedge y=2+a\lambda$.
Substitutie geeft $4(-4\frac{3}{4}+\lambda)^2-9(2+a\lambda)^2+8(-4\frac{3}{4}+\lambda)+36(2+a\lambda)+13=0$

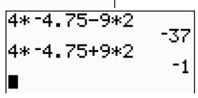


$4(22\frac{9}{16}-9\frac{1}{2}\lambda+\lambda^2)-9(4+4a\lambda+a^2\lambda^2)-38+8\lambda+72+36a\lambda+13=0$
$90\frac{1}{4}-38\lambda+4\lambda^2-36-36a\lambda-9a^2\lambda^2-38+8\lambda+72+36a\lambda+13=0$
$(4-9a^2)\lambda^2-30\lambda+101\frac{1}{4}=0$
$D=(-30)^2-4\cdot(4-9a^2)\cdot 101\frac{1}{4}=900-1620+3645a^2=3645a^2-720.$



Raken $\Rightarrow D=0 \Rightarrow 3645a^2-720=0 \Rightarrow 3645a^2=720=0 \Rightarrow a^2=\frac{720}{3645}=\frac{16}{81} \Rightarrow a=\pm\frac{4}{9}.$

$\underline{r}_{l_1}=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{4}{9}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{n}_{l_1}=\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix}$. Dus l_1: $4x-9y=c$ door $A(-4\frac{3}{4},\,2)\Rightarrow l_1$: $4x-9y=-37.$
$\underline{r}_{l_2}=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{n}_{l_2}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$. Dus l_2: $4x+9y=c$ door $A(-4\frac{3}{4},\,2)\Rightarrow l_2$: $4x+9y=-1.$



D4
$\begin{cases} x=-4+2\cos(\varphi) \\ y=6+3\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=-12+6\cos(\varphi) \\ 2y=12+6\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+12=6\cos(\varphi) \\ 2y-12=6\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow$
$(3x+12)^2+(2y-12)^2=\left(6\cos(\varphi)\right)^2+\left(6\sin(\varphi)\right)^2=36\cos^2(\varphi)+36\sin^2(\varphi)=36\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)=36\cdot 1=36.$
$(3x+12)^2+(2y-12)^2=36$ ofwel $9(x+4)^2+4(y-6)^2=36$ ofwel $\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{(y-6)^2}{9}=1.$
Dus K is de ellips met middelpunt $(-4,\,6)$. ($a^2=4<b^2=9 \Rightarrow$ brandpunten op de vert. symm. as en $c^2=b^2-a^2=9-4=5$)
De toppen zijn $(-4-2,\,6)=(-6,\,6)$, $(-4+2,\,6)=(-2,\,6)$, $(-4,\,6-3)=(-4,\,3)$ en $(-4,\,6+3)=(-4,\,9)$.
De brandpunten zijn $(-4,\,6-\sqrt{5})$ en $(-4,\,6+\sqrt{5})$.

D5a Het middelpunt van de ellips e is $(5, 1)$; $a = 7 - 5 = 2$ en $b = 2 - 1 = 1$.

Een vergelijking van ellips e is $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$ ofwel $(x-5)^2 + 4(y-1)^2 = 4$ ofwel $(x-5)^2 + (2y-2)^2 = 4$.

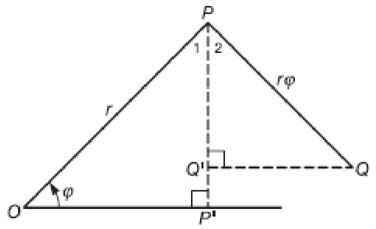
$(x-5)^2 + (2y-2)^2 = 4\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = 4\cos^2(\varphi) + 4\sin^2(\varphi)$

Een parametervoorstelling van e is $\begin{cases} x - 5 = 2\cos(\varphi) \\ 2y - 2 = 2\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2\cos(\varphi) \\ 2y = 2 + 2\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2\cos(\varphi) \\ y = 1 + \sin(\varphi). \end{cases}$

D5b Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{2}$ (de assen moeten evenlang worden) dus vervang x door $2x$.

Een parametervoorstelling van c is $\begin{cases} 2x = 5 + 2\cos(\varphi) \\ y = 1 + \sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} + \cos(\varphi) \\ y = 1 + \sin(\varphi). \end{cases}$

Een vergelijking van c is $(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = 1$.

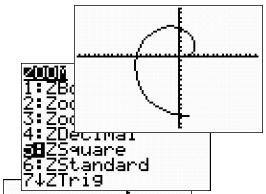


D6a $\left.\begin{array}{l} \angle P_1 + \varphi = 90^\circ \\ \angle P_{12} = 90^\circ \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_2 = \varphi.$

$\sin\angle P_2 = \frac{QQ'}{PQ} \Rightarrow QQ' = PQ \cdot \sin\angle P_2 = r\varphi\sin(\varphi).$

In $\Delta OPP'$ is $\cos(\varphi) = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{r} \Rightarrow OP' = r\cos(\varphi).$

Dus $x_Q = OP' + QQ' = r\cos(\varphi) + r\varphi\sin(\varphi).$

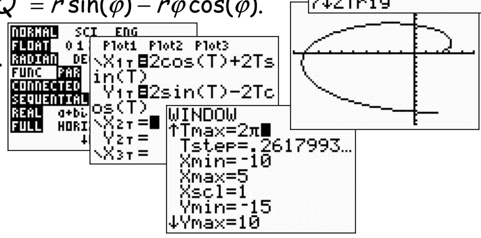


D6b $\cos\angle P_2 = \frac{PQ'}{PQ} \Rightarrow PQ' = PQ \cdot \cos\angle P_2 = r\varphi\cos(\varphi)$. Dus $y_Q = PP' - PQ' = r\sin(\varphi) - r\varphi\cos(\varphi).$

D6c $r = 2$ geeft $x_Q = 2\cos(\varphi) + 2\varphi\sin(\varphi)$ en $y_Q = 2\sin(\varphi) - 2\varphi\cos(\varphi)$.

Voer in $x_{1T} = 2\cos(T) + 2T\sin(T)$ en $y_{1T} = 2\sin(T) - 2T\cos(T)$.

Maak een schets van de plot hiernaast.



D7a $x = 0 \wedge y = 0$ geeft $t^3 - 3t^2 = 0 \wedge t^2 - 3t = 0$

$t^2(t-3) = 0 \wedge t(t-3) = 0$

$(t = 0 \vee t = 3) \wedge (t = 0 \vee t = 3)$

$t = 0 \vee t = 3.$

Dus voor $t = 0$ en $t = 3$ snijdt K zichzelf in de oorsprong.

D7b x is een derdegraadsfunctie van t, dus x kan elke waarde aannemen.

$y = t^2 - 3t = t(t-3)$ is een dalparabool met een maximum voor $t = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$.

$y_{\max} = y(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{9}{4}$. Dus $y \geq -\frac{9}{4}$.

D7c $\begin{cases} x = t^3 - 3t^2 \\ y = t^2 - 3t \end{cases}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{2t-3}{3t^2 - 6t}$.

Raaklijn // x-as: $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2t - 3 = 0 \wedge 3t^2 - 6t \neq 0 \Rightarrow 2t = 3 \wedge 3t(t-2) \neq 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \wedge (t \neq 0 \wedge t \neq 2) \Rightarrow t = \frac{3}{2}$.

$t = \frac{3}{2}$ geeft $x = (\frac{3}{2})^3 - 3 \cdot (\frac{3}{2})^2 = \frac{27}{8} - \frac{27}{4} = \frac{27}{8} - \frac{54}{8} = -\frac{27}{8}$ en $y = -\frac{9}{4}$ (zie D7b). Dus raaklijn // x-as in $(-\frac{27}{8}, -\frac{9}{4})$.

Raaklijn // y-as: $3t^2 - 6t = 0 \wedge 2t - 3 \neq 0 \Rightarrow (t = 0 \vee t = 2) \wedge t \neq \frac{3}{2} \Rightarrow t = 0 \vee t = 2.$

$t = 0$ geeft $(0, 0)$(zie D7a); $t = 2$ geeft $x = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$ en $y = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$. Raaklijn // y-as in $(-4, -2)$ en $(0, 0)$.

D7d Voer in $x_{1T} = T^3 - 3T^2$ en $y_{1T} = T^2 - 3T$. Maak een schets van de plot hieronder.

D7e $x - 3y = 1 \Rightarrow -3y = -x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

// $x - 3y = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2t-3}{3t^2-6t} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3t^2 - 6t = 6t - 9 \wedge 3t^2 - 6t \neq 0$

$3t^2 - 12t + 9 = 0 \wedge (t \neq 0 \wedge t \neq 2$ (zie D7c)$)$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \wedge (t \neq 0 \wedge t \neq 2)$

$(t-1)(t-3) = 0 \wedge (t \neq 0 \wedge t \neq 2)$

$(t = 1 \vee t = 3) \wedge (t \neq 0 \wedge t \neq 2)$. Dus $t = 1 \vee t = 3$.

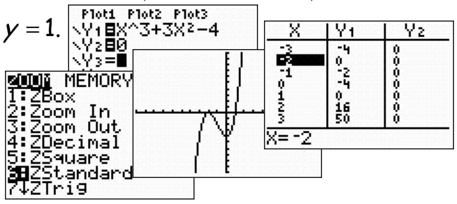
$t = 1$ geeft $x = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$ en $y = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$; $t = 3$ geeft $x = 3^3 - 3 \cdot 3^2 = 0$ en $y = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$.

Dus de raaklijn // $x - 3y = 1$ in $(-2, -2)$ en $(0, 0)$.

D8a $y^3+3y^2+x^2-4=0$ geeft $3y^2\mathrm{d}y+6y\mathrm{d}y+2x\mathrm{d}x-0=0 \Rightarrow (3y^2+6y)\mathrm{d}y=-2x\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-2x}{3y^2+6y}$.

Raaklijn // x-as: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \Rightarrow -2x=0 \wedge 3y^2+6y\neq 0 \Rightarrow x=0 \wedge 3y(y+2)\neq 0 \Rightarrow x=0 \wedge \left(y\neq 0 \wedge y\neq -2\right)$.

$x=0$ geeft $y^3+3y^2+0^2-4=0$ (intersect/TABLE) $\Rightarrow y=-2$ (voldoet niet) $\wedge\ y=1$.
Dus raaklijn // x-as in $(0, 1)$.



Raaklijn // y-as: $3y^2+6y=0 \wedge -2x\neq 0 \Rightarrow \left(y=0 \vee y=-2\right) \wedge x\neq 0$.

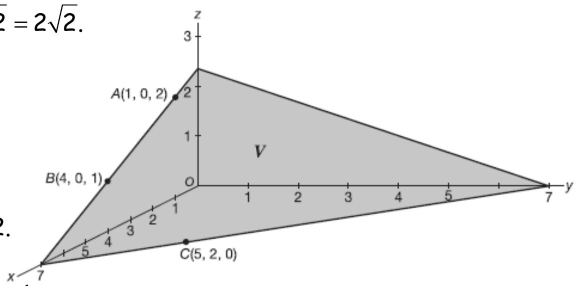
$y=0$ geeft $0^3+3\cdot 0^2+x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \vee x=-2$ (voldoen) en

$y=-2$ geeft $(-2)^3+3\cdot(-2)^2+x^2-4=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$ (voldoet niet).
Dus raaklijn // y-as in $(-2, 0)$ en $(2, 0)$.

D8b Stel m: $y=ax+b$ met $a=\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{(2,-3)}=\frac{-2\cdot 2}{3\cdot(-3)^2+6\cdot -3}=\frac{-4}{27-18}=-\frac{4}{9}$.

m: $y=-\frac{4}{9}x+b$ door $(2,\ -3) \Rightarrow -3=-\frac{4}{9}\cdot 2+b \Rightarrow b=-3+\frac{8}{9}=-2\frac{1}{9}$. Dus m: $y=-\frac{4}{9}x-2\frac{1}{9}$.

D8c $y=-1$ invullen in $y^3+3y^2+x^2-4=0$ geeft $-1+3+x^2-4=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$.
Dus $A(-\sqrt{2}, 0)$ en $B(\sqrt{2}, 0)$. De lengts van lijnstuk AB is $\sqrt{2}--\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.



D9a Zie hiernaast.

D9b $A(1, 0, 2)$ en $B(4, 0, 1)$ liggen in het Oxz-vlak.

AB: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4-1\\0-0\\1-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$.

AB snijden met de x-as ($y=0 \wedge z=0$) geeft: $z=2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$.

$\lambda=2$ geeft het punt op de x-as: $(x, y, z)=(7, 0, 0)$.

AB snijden met de z-as ($x=0 \wedge y=0$) geeft: $x=1+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{3}$.

$\lambda=-\frac{1}{3}$ geeft het punt op de z-as: $(x, y, z)=(0, 0, 2\frac{1}{3})$.

V: $\frac{x}{7}+\frac{y}{b}+\frac{z}{2\frac{1}{3}}=1$ door $C(5, 2, 0) \Rightarrow \frac{5}{7}+\frac{2}{b}=1 \Rightarrow \frac{2}{b}=\frac{2}{7} \Rightarrow b=7$.

Dus V: $\frac{x}{7}+\frac{y}{7}+\frac{z}{\frac{7}{3}}=1$ ofwel $\frac{x}{7}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{7}=1$ ofwel $x+y+3z=7$.

D9c PQ: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4--1\\5-2\\3-6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\3\\-3\end{pmatrix}$.

PQ snijden met V geeft: $4+5\lambda+5+3\lambda+3(3-3\lambda)=7 \Rightarrow 4+5\lambda+5+3\lambda+9-9\lambda=7 \Rightarrow -\lambda=-11 \Rightarrow \lambda=11$.

$\lambda=12$ geeft als snijpunt $(4+11\cdot 5, 5+11\cdot 3, 3+11\cdot -3)=(59, 38,\ -30)$.

D10a De lijn door B evenwijdig met EG snijdt de x-as in $(8, 0, 0)$ en de y-as in $(0, 12, 0)$.
De lijn door E evenwijdig met BG snijdt de z-as in $(0, 0, 6)$.

Dus BEG: $\frac{x}{8}+\frac{y}{12}+\frac{z}{6}=1$ ofwel $3x+2y+4z=24$.

M is het midden van $E(4, 0, 3)$ en $F(4, 6, 3)$, dus $M(\frac{4+4}{2},\ \frac{0+6}{2},\ \frac{3+3}{2})=M(4, 3, 3)$.

OM: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4-0\\3-0\\3-0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$.

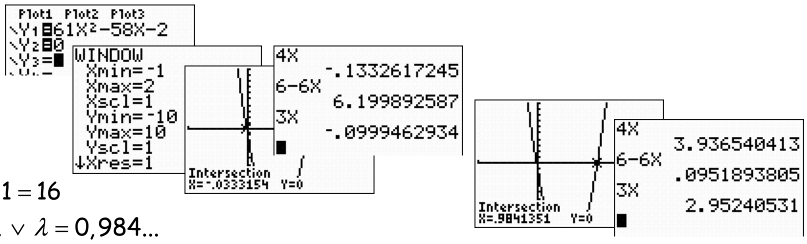
D10b OM snijden met BEG geeft: $3\cdot 4\lambda+2\cdot 3\lambda+4\cdot 3\lambda=24 \Rightarrow 12\lambda+6\lambda+12\lambda=24 \Rightarrow 30\lambda=24 \Rightarrow \lambda=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$.

$\lambda=\frac{4}{5}$ geeft als snijpunt $S(\frac{4}{5}\cdot 4,\ \frac{4}{5}\cdot 3,\ \frac{4}{5}\cdot 3)=S(\frac{16}{5},\ \frac{12}{5},\ \frac{12}{5})$.

D11a De projectie van $M(2, 3, 1)$ op het vlak DEF: $z=3$ is $N(2, 3, 3)$ (het middelpunt van de cirkel).
In ΔMPN, met P op c, is $NP=\sqrt{PM^2-NM^2}=\sqrt{16-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (de straal van de cirkel).

D11b $O(0, 0, 0)$ ligt binnen de bol, want $(0-2)^2+(0-3)^2+(0-1)^2=(-2)^2+(-3)^2+(-1)^2=4+9+1=14<16$.
$A(4, 0, 0)$ ligt binnen de bol, want $(4-2)^2+(0-3)^2+(0-1)^2=2^2+(-3)^2+(-1)^2=4+9+1=14<16$.
$B(4, 6, 0)$ ligt binnen de bol, want $(4-2)^2+(6-3)^2+(0-1)^2=2^2+3^2+(-1)^2=4+9+1=14<16$.
$C(0, 6, 0)$ ligt binnen de bol, want $(0-2)^2+(6-3)^2+(0-1)^2=(-2)^2+3^2+(-1)^2=4+9+1=14<16$.
$D(0, 0, 3)$ ligt buiten de bol, want $(0-2)^2+(0-3)^2+(3-1)^2=(-2)^2+(-3)^2+2^2=4+9+4=17>16$.
$E(4, 0, 3)$ ligt buiten de bol, want $(4-2)^2+(0-3)^2+(3-1)^2=2^2+(-3)^2+2^2=4+9+4=17>16$.
$F(4, 6, 3)$ ligt buiten de bol, want $(4-2)^2+(6-3)^2+(3-1)^2=2^2+3^2+2^2=4+9+4=17>16$.
$G(0, 6, 3)$ ligt buiten de bol, want $(0-2)^2+(6-3)^2+(3-1)^2=(-2)^2+3^2+2^2=4+9+4=17>16$.

D11c CE: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4-0 \\ 0-6 \\ 3-0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.



CE snijden met de bol geeft:
$(4\lambda-2)^2 + (6-6\lambda-3)^2 + (3\lambda-1)^2 = 16$
$(4\lambda-2)^2 + (3-6\lambda)^2 + (3\lambda-1)^2 = 16$
$16\lambda^2 - 16\lambda + 4 + 9 - 36\lambda + 36\lambda^2 + 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 16$
$61\lambda^2 - 58\lambda - 2 = 0$ intersect $\Rightarrow \lambda = -0{,}033... \vee \lambda = 0{,}984...$
$\lambda = -0{,}033...$ geeft het punt $(-0{,}133;\ 6{,}200;\ -0{,}100)$ en $\lambda = 0{,}984...$ geeft het punt $(3{,}937;\ 0{,}095;\ 2{,}952)$.

D12a De doorsnede van het vlak $x = 3\lambda$ en het omwentelingsoppervlak is de cirkel met middelpunt $M(3\lambda, 0, 0)$ en straal $r = 4\lambda$.
Voor een punt $P(3\lambda, y, z)$ op deze cirkel geldt dus $x = 3\lambda \wedge y^2 + z^2 = 16\lambda^2$.
Dit geeft $x = 3\lambda \wedge \frac{9}{16}y^2 + \frac{9}{16}z^2 = 9\lambda^2 \Rightarrow \frac{9}{16}y^2 + \frac{9}{16}z^2 = x^2$ ofwel $16x^2 - 9y^2 - 9z^2 = 0$.

D12b De doorsnede van het vlak $y = 4\lambda$ en het omwentelingsoppervlak is de cirkel met middelpunt $M(0, 4\lambda, 0)$ en straal $r = 3\lambda$.
Voor een punt $P(x, 4\lambda, z)$ op deze cirkel geldt dus $y = 4\lambda \wedge x^2 + z^2 = 9\lambda^2$.
Dit geeft $y = 4\lambda \wedge \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}z^2 = 16\lambda^2 \Rightarrow \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}z^2 = y^2$ ofwel $16x^2 - 9y^2 + 16z^2 = 0$.

D13a $x = 0 \wedge \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ ofwel $x = 0 \wedge 9y^2 + 4z^2 = 36$.
De doorsnede van het vlak $z = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is de cirkel met middelpunt $M(0, 0, \lambda)$.
$z = \lambda \wedge 9y^2 + 4z^2 = 36 \Rightarrow 9y^2 + 4\lambda^2 = 36 \Rightarrow 9y^2 = 36 - 4\lambda^2 \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{4}{9}\lambda^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - \frac{4}{9}\lambda^2}$.
Dus de straal van de cirkel is $\sqrt{4 - \frac{4}{9}\lambda^2}$.
Voor een punt $P(x, y, \lambda)$ op deze cirkel geldt dus $z = \lambda \wedge x^2 + y^2 = 4 - \frac{4}{9}\lambda^2$.
Dit geeft $x^2 + y^2 = 4 - \frac{4}{9}z^2$ ofwel $9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$.

D13b De doorsnede van het vlak $y = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is de cirkel met middelpunt $(0, \lambda, 0)$.
$y = \lambda \wedge x^2 - y^2 = -2 \Rightarrow x^2 - \lambda^2 = -2 \Rightarrow x^2 = \lambda^2 - 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\lambda^2 - 2}$.
Dus de straal van de cirkel is $\sqrt{\lambda^2 - 2}$.
Voor een punt $P(x, \lambda, z)$ op deze cirkel geldt dus $y = \lambda \wedge x^2 + z^2 = \lambda^2 - 2$.
Dit geeft $x^2 + z^2 = y^2 - 2$ ofwel $x^2 - y^2 + z^2 = -2$.

D13c $y = 0 \wedge \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ ofwel $y = 0 \wedge 9x^2 - 4z^2 = 36$.
De doorsnede van het vlak $z = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is de cirkel met middelpunt $(0, 0, \lambda)$.
$z = \lambda \wedge 9x^2 - 4z^2 = 36 \Rightarrow 9x^2 - 4\lambda^2 = 36 \Rightarrow 9x^2 = 36 + 4\lambda^2 \Rightarrow x^2 = 4 + \frac{4}{9}\lambda^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 + \frac{4}{9}\lambda^2}$.
Dus de straal van de cirkel is $\sqrt{4 + \frac{4}{9}\lambda^2}$.
Voor een punt $P(x, y, \lambda)$ op deze cirkel geldt dus $z = \lambda \wedge x^2 + y^2 = 4 + \frac{4}{9}\lambda^2$.
Dit geeft $x^2 + y^2 = 4 + \frac{4}{9}z^2$ ofwel $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$.

D14a $A(0, \lambda^2, 2\lambda)$ is een punt van de parabool $x = 0 \wedge z^2 = 4y$.
Voor een punt $P(x, \lambda^2, z)$ op de cirkel met $M(0, \lambda^2, 0)$ in het vlak $y = \lambda^2$ geldt $x^2 + z^2 = 4\lambda^2 \wedge y = \lambda^2$.
Hieruit volgt dat $x^2 + z^2 = 4y$ ofwel $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}z^2$ een vergelijking van de paraboloïde is.

D14b $A(0, \lambda^2, 2\lambda)$ is een punt van de parabool $x = 0 \wedge z^2 = 4y$.
Voor een punt $P(x, y, 2\lambda)$ op de cirkel met $M(0, 0, 2\lambda)$ in het vlak $z = 2\lambda$ geldt $x^2 + y^2 = \lambda^4 \wedge z = 2\lambda$.
Hieruit volgt dat $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2}z)^4$ ofwel $16x^2 + 16y^2 - z^4 = 0$ een vergelijking van de paraboloïde is.

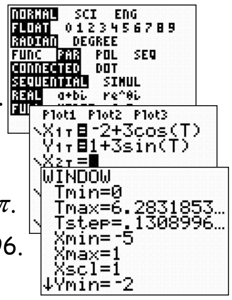
TI-84 10. Parameterkrommen

Het plotten van parameterkrommen

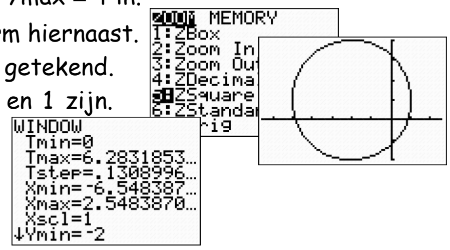
O m de kromme te plotten die hoort bij de parametervoorstelling

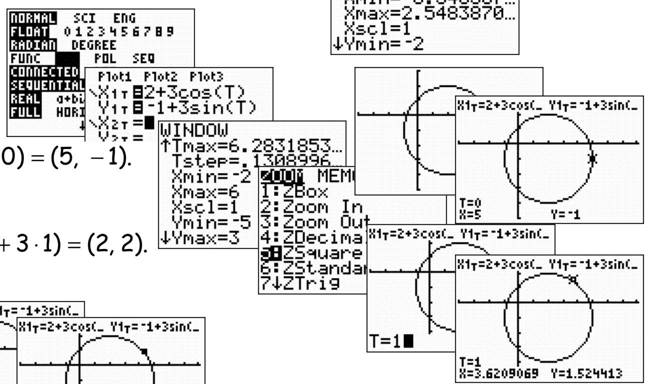
$\begin{cases} x = -2 + 3\cos(t) \\ y = 1 + 3\sin(t) \end{cases}$ met t op $[0, 2\pi]$ ga je te werk zoals hieronder beschreven.

Daarbij is er rekening mee gehouden dat x de waarden $-5 = -2 - 3$ tot en met $1 = -2 + 3$ kan aannemen, dat y de waarden $-2 = 1 - 3$ tot en met $4 = 1 + 3$ kan aannemen en dat de grafiek ook echt als een cirkel op het scherm moet komen. Daarom wordt gebruik gemaakt van de optie **ZSquare** uit het ZOOM-ZOOM-menu.



1. Kies in het MODE-menu op de derde regel voor **RADIAN** en op de vierde regel voor **PAR**.
   Met PAR kies je voor de instelling waarmee je parametervoorstellingen kunt invoeren.
2. Kies $\boxed{\text{Y=}}$ en zorg ervoor dat je het scherm hiernaast krijgt. T krijg je met de $\boxed{\text{X,T,}\Theta,n}$–toets.
3. Kies $\boxed{\text{WINDOW}}$. De eerste drie getallen die je moet invoeren betreffen de waarde van t.
   Omdat t op $[0, 2\pi]$, neem je $\text{Tmin} = 0$ en $\text{Tmax} = 2\pi$.
   Nadat je 2π hebt ingevoerd en op $\boxed{\text{ENTER}}$ hebt gedrukt, geeft de GR een benadering van 2π.
   Gebruik verder voor de stapgrootte van t de standaardinstelling van de GR: $\frac{1}{12}\pi \approx 0{,}1308996$.
   Voer verder op de gebruikelijke manier $\text{Xmin} = 0$, $\text{Xmax} = 1$, $\text{Ymin} = -2$, $\text{Ymax} = 4$ in.
4. Kies de optie **ZSquare** uit het ZOOM-ZOOM-menu. Je krijgt het scherm hiernaast.
   Door de keuze ZSquare wordt de parameterkromme ook echt als cirkel getekend.
   Door $\boxed{\text{WINDOW}}$ te kiezen kun je nagaan dat Xmin en Xmax niet meer -5 en 1 zijn.
   Dit komt door de keuze ZSquare. Zie ook de onderste figuur hiernaast.





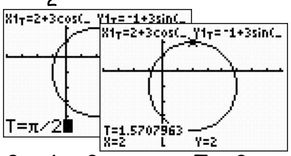
1a $X\min = -2,\ X\max = 6,\ Y\min = -5,\ Y\max = 3.$

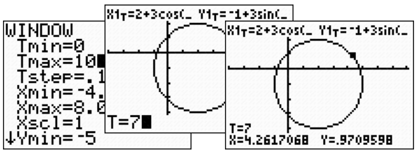
1b Zie de plot hiernaast.

1c $t = 0$ (startpunt) geeft $(x, y) = (2 + 3 \cdot 1,\ -1 + 3 \cdot 0) = (5,\ -1).$

1d $t = 1$ geeft $(x, y) \approx (3{,}62; 1{,}52).$

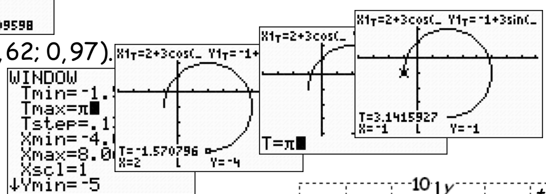
1e $t = \frac{\pi}{2}$ (hoogste punt) geeft $(x, y) = (2 + 3 \cdot 0,\ -1 + 3 \cdot 1) = (2, 2).$



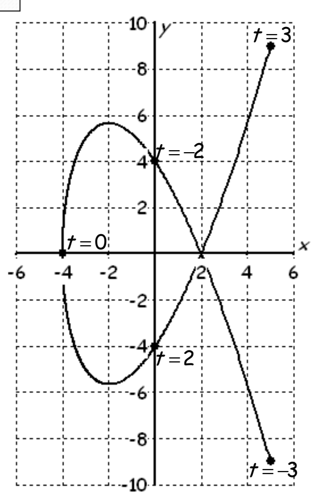


1f $0 \le 6 \le 2\pi$, maar $7 \ge 2\pi$.

1g Nu is $t = 7$ toegestaan (zie hierboven); $t = 7$ geeft $(x, y) \approx (2{,}62; 0{,}97).$

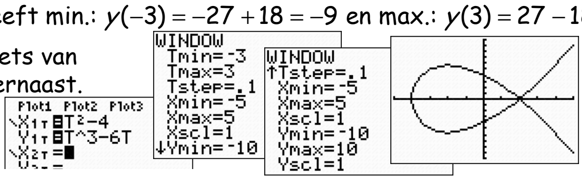


1h De eindpunten zijn het startpunt en het laatste punt.
$t = -\frac{1}{2}\pi$ geeft $(x, y) = (2 + 3 \cdot 0,\ -1 + 3 \cdot -1) = (2,\ -4)$
en $t = \pi$ geeft $(x, y) = (2 + 3 \cdot -1,\ -1 + 3 \cdot 0) = (-1,\ -1).$



2a $X\min = -5,\ X\max = 5,\ Y\min = -10,\ Y\max = 10.$
$x = t^2 - 4$ heeft min.: $x(0) = -4$ en max.: $x(-3) = x(3) = 9 - 4 = 5.$
$y = t^3 - 6t$ heeft min.: $y(-3) = -27 + 18 = -9$ en max.: $y(3) = 27 - 18 = 9.$

2b Maak een schets van de grafiek hiernaast.



$t = -3$ geeft $x = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$ en $y = (-3)^3 - 6 \cdot -3 = -27 + 18 = -9 \Rightarrow (5,\ -9).$
$t = -2$ geeft $x = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$ en $y = (-2)^3 - 6 \cdot -2 = -8 + 12 = 4 \Rightarrow (0, 4).$
$t = 0$ geeft $x = 0^2 - 4 = -4$ en $y = 0^3 - 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (-4, 0).$
$t = 2$ geeft $x = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$ en $y = 2^3 - 6 \cdot 2 = 8 - 12 = -4 \Rightarrow (0,\ -4).$
$t = 3$ geeft $x = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$ en $y = 3^3 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 \Rightarrow (5, 9).$